



**UNDERVISNINGS  
MINISTERIET**  
KVALITETS- OG  
TILSYNSSTYRELSEN

---

# Matematik A

---

Studentereksamen

Torsdag den 28. maj 2015  
kl. 9.00 - 14.00

### **Opgavesættet er delt i to dele.**

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.  
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-14 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

### **Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt**

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

#### **1. TEKST**

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

#### **2. NOTATION OG LAYOUT**

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

#### **3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION**

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

#### **4. FIGURER**

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

#### **5. KONKLUSION**

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

## Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

### Opgave 1



Foto: Colourbox

I år 2001 var der 21365 slædehunde i Grønland. I perioden 2001-2011 faldt antallet af slædehunde i Grønland med 1135 slædehunde om året.

Indfør passende variable, og opstil en model, der beskriver udviklingen i antallet af slædehunde i Grønland i perioden 2001-2011.

### Opgave 2

To vektorer i planen er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix},$$

hvor  $t$  er et tal.

Bestem værdien af  $t$ , så  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er ortogonale.

### Opgave 3

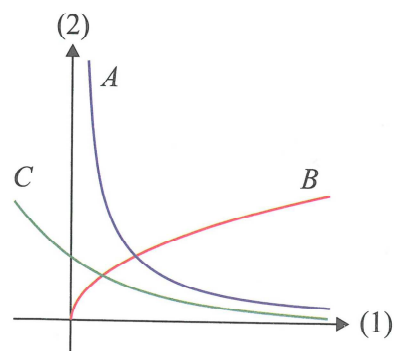
På figuren ses graferne for tre funktioner

$$f(x) = x^{-1}$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$h(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

Begrund for hver af graferne  $A$ ,  $B$  og  $C$ , hvilken af funktionerne  $f$ ,  $g$  og  $h$  den er graf for.



### Opgave 4

En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = (2x+1) \cdot \ln(x), \text{ hvor } x > 0.$$

Bestem  $f'(1)$ .

**Opgave 5**

Om en funktion  $f$  oplyses, at punktet  $P(0,3)$  ligger på grafen for  $f$ , samt at funktionen er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = e^x + 2y.$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $P$ .

**Opgave 6**

En parabel er graf for funktionen

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 21.$$

Parablen har toppunkt i punktet  $T(5, -4)$ , og den skærer førsteaksen i punkterne  $A$  og  $B$ .  
Det oplyses, at  $A(3, 0)$ .

Bestem koordinatsættet til  $B$ , og bestem tallene  $a$  og  $b$ .

|                                        |
|----------------------------------------|
| <b>Besvarelsen afleveres kl. 10.00</b> |
|----------------------------------------|



## Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

**Opgave 7** En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 7.$$

Det oplyses, at  $f$  har netop ét nulpunkt  $P$ .

- Bestem koordinatsættet til  $P$ .
- Bestem  $f'(x)$ , og bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $Q(2, f(2))$ .
- Bestem monotoniforholdene for  $f$ .

**Opgave 8**



Foto: colourbox

Vægten af en torsk i et bestemt havområde afhænger af torskens alder. Udviklingen i vægten af en torsk fra dette område kan beskrives ved følgende model

$$v(x) = \frac{10,28}{1 + 3,177 \cdot e^{-0,224x}},$$

hvor  $v(x)$  betegner vægten af en torsk (målt i kg), og  $x$  betegner alderen af en torsk (målt i år).

- Tegn grafen for  $v$ , og benyt modellen til at bestemme alderen af en torsk, der vejer 8,5 kg.
- Bestem det tidspunkt, hvor væksthastigheden for vægten af en torsk ifølge modellen er størst.

### Opgave 9

En stikprøve fra en population er udvalgt på tilfældig måde. Personerne i stikprøven har svaret på spørgsmålet

*"Bør der indføres forbud mod at bære hovedbeklædning i offentlige bygninger?"*.

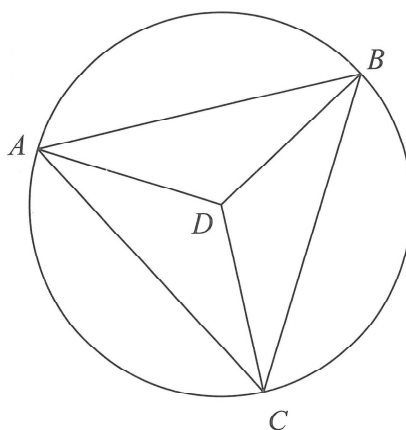
Svarene på spørgsmålet er opdelt efter personernes uddannelse, og svarene fordeler sig som vist i tabellen.

|                                                | Ja  | Nej |
|------------------------------------------------|-----|-----|
| Erhvervsuddannelse                             | 102 | 132 |
| Videregående uddannelse af kort varighed       | 43  | 63  |
| Videregående uddannelse af mellemlang varighed | 80  | 157 |
| Videregående uddannelse af lang varighed       | 30  | 84  |
| Grundskoleuddannelse                           | 72  | 99  |

På grundlag af svarene fra personerne i stikprøven skal det undersøges, om der er uafhængighed mellem uddannelse og holdning til spørgsmålet.

- Opstil en nulhypotese, og bestem med udgangspunkt heri de forventede værdier.
- Afgør på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen kan forkastes.

### Opgave 10



På figuren ses en model af et cafébord (set oppefra). Bordet har form som en cirkel, hvori der er indtegnet en ligesidet trekant  $ABC$ , der igen er delt op i 3 kongruente og ligebenede trekanter  $ABD$ ,  $BDC$  og  $CDA$  (se billedet). Bordets radius er 50 cm.

- Bestem  $\angle ADB$ , samt arealet af trekant  $ABC$ .
- Bestem omkredsen af trekant  $ABC$ .

**Opgave 11**

For en bestemt population af fisk har man gennem en årrække opgjort den relative væksthastighed (målt i  $\text{år}^{-1}$ ). Resultatet fremgår af nedenstående tabel.

| Årstal                 | 2001  | 2002  | 2003  | 2004  | 2005  | 2006  |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Relativ væksthastighed | 0,398 | 0,302 | 0,259 | 0,221 | 0,158 | 0,124 |

I en model kan udviklingen i den relative væksthastighed beskrives ved en funktion af typen

$$f(t) = b \cdot a^t,$$

hvor  $f(t)$  betegner den relative væksthastighed (målt i  $\text{år}^{-1}$ ) til tidspunktet  $t$  (målt i antal år efter 2001).

- Benyt tabellens data til at bestemme  $a$  og  $b$ .
- Benyt modellen til at bestemme det år, hvor den relative væksthastighed er  $0,1 \text{ år}^{-1}$ , og bestem halveringstiden for  $f$ .

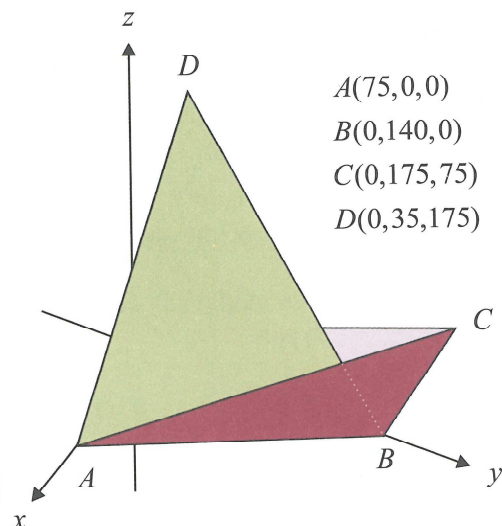
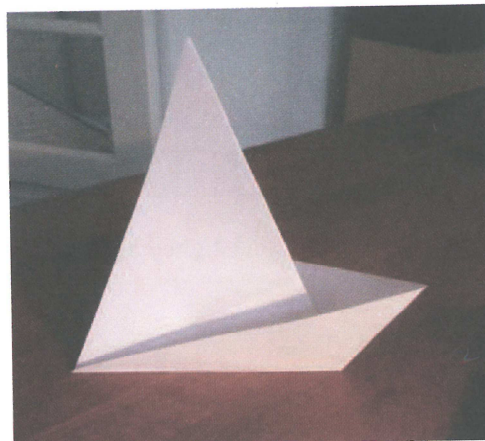
I modellen kan antallet af fisk i populationen beskrives ved en funktion, der er løsning til differentialligningen

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt} = f(t),$$

hvor  $N(t)$  er antal fisk i populationen til tidspunktet  $t$  (målt i antal år efter 2001). Det oplyses, at der er 520 fisk i populationen i år 2001.

- Bestem en forskrift for  $N$ , skitsér grafen for  $N$ , og bestem det år, hvor antallet af fisk i populationen overstiger 2000.

### Opgave 12



På figuren ses en model af et origamiskib indtegnet i et koordinatsystem i rummet med enheden mm på alle akser. Sejlskibets sejl er udsپændt mellem punkterne  $A$ ,  $B$  og  $D$ .

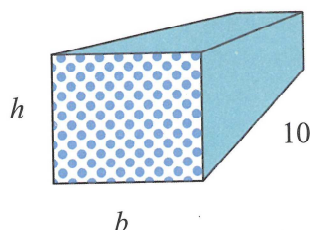
- a) Bestem en ligning for den plan  $\alpha$ , der indeholder sejlskibets sejl, og bestem arealet af sejlskibets sejl.

Det oplyses, at den plan  $\beta$ , som indeholder punkterne  $A$ ,  $B$  og  $C$ , kan beskrives ved ligningen

$$28x + 15y - 7z - 2100 = 0.$$

- b) Bestem den spidse vinkel mellem sejlskibets sejl og den side af sejlskibet, der er udsپændt af punkterne  $A$ ,  $B$  og  $C$ .

### Opgave 13



En bestemt faskine består af en ydre lukket kasse samt et porøst indre. Faskinens bredde benævnes  $b$  (målt i m), højden benævnes  $h$  (målt i m) og længden er 10 m.

- a) Gør rede for, at faskinens ydre areal er givet ved

$$O = 2 \cdot b \cdot h + 20 \cdot b + 20 \cdot h.$$

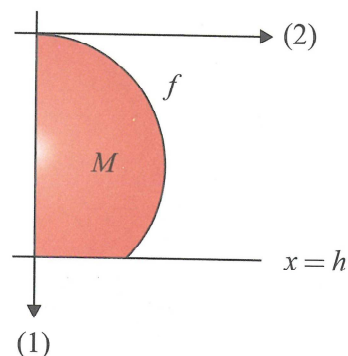
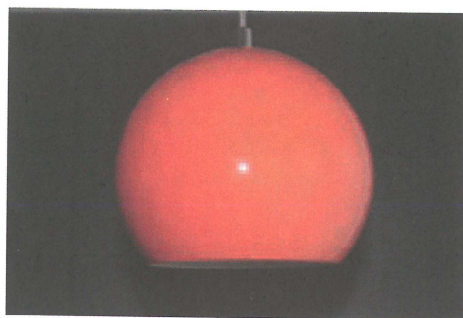
Det volumen, som faskinen kan rumme, betegnes  $V$  (målt i  $\text{m}^3$ ). Det oplyses, at  $V$  er givet ved

$$V = \frac{20 \cdot b \cdot h}{3}.$$

Endvidere oplyses, at faskinen kan rumme  $100 \text{ m}^3$  vand, og at  $0 < b < 10$ .

- b) Bestem  $h$  udtrykt ved  $b$ , og bestem den værdi af  $b$ , der gør faskinens ydre areal mindst mulig.

## Opgave 14



En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 20x}, \text{ hvor } 0 \leq x \leq 20.$$

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med førsteaksen og linjen  $x = h$  et område  $M$ .  
Det oplyses, at  $10 \leq h \leq 20$ .

Det ydre af en serie af lamper har form som overfladen af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når  $M$  drejes  $360^\circ$  omkring førsteaksen. Enheden på begge akser er cm.

- a) Tegn grafen for  $f$ , og bestem lampens diameter på det bredeste sted og ved lampens åbning, når  $h = 18$ .

Det oplyses, at lampens overfladeareal kan beregnes ved integralet

$$O = 2\pi \int_0^h f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

- b) Bestem  $h$ , når overfladearealet er 1005.

Det oplyses endvidere, at lamperne i serien har form som en del af en kugle.

- c) Bestem en ligning for den kugle, som lampen er en del af.







