UNDERVISNINGS
MINISTERIET
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

1stx151-MAT/A-22052015

Fredag den 22. maj 2015
kl. 9.00 - 14.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-15 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. **TEKST**
   Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. **NOTATION OG LAYOUT**
   Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. **REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION**
   Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. **FIGURER**
   I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. **KONKLUSION**
   Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

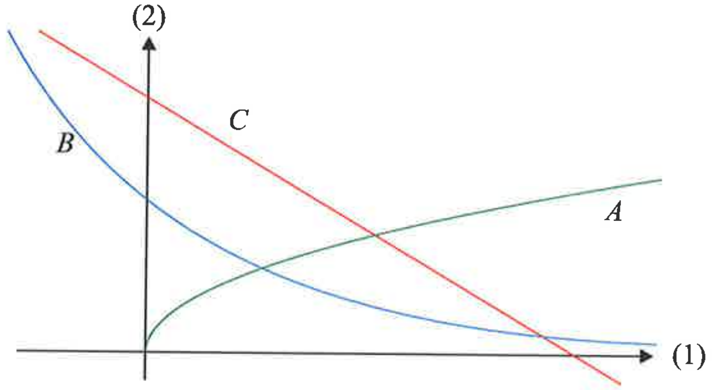
Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 I et bestemt land var der 190 pengeinstitutter i 2001. Efterfølgende er der hvert år blevet lukket 8 pengeinstitutter.

Indfør passende variable, og opstil en model for udviklingen i antallet af pengeinstitutter i landet efter 2001.

Opgave 2 Figuren viser graferne A, B og C for henholdsvis en lineær funktion f, en potensfunktion g og en eksponentialfunktion h.



Gør for hver af graferne A, B og C rede for, hvilken af de tre funktioner den er graf for.

Opgave 3 Undersøg, om $x = 3$ er en løsning til ligningen $x^3 - 9 \cdot x^2 + 23 \cdot x - 15 = 0$.

Opgave 4 En funktion f er givet ved forskriften

$$f(x) = 5e^x + 4 .$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

Opgave 5 En funktion f er givet ved

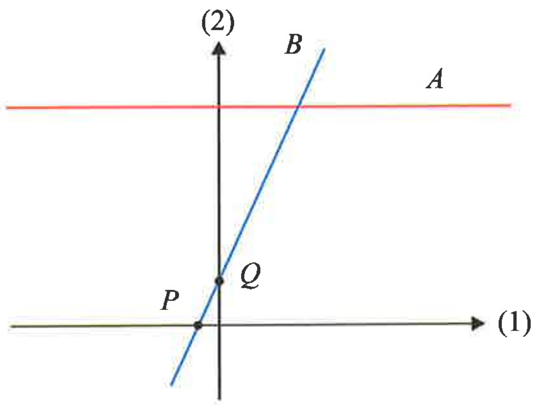
$$f(x)=\frac{5}{x}+2x\,,\quad x>0\,.$$

Redegør for, hvilken af de tre funktioner

$$g(x)=\frac{-5}{x^2}+2$$
$$h(x)=5\ln(x)+x^2$$
$$k(x)=\ln(5x)+x^2$$

der er en stamfunktion til f.

Opgave 6 Figuren viser graferne for de afledede funktioner af funktionerne f og g.



A er grafen for den afledede funktion f', som har forskriften $f'(x)=5$. B er grafen for den afledede funktion g', som er en lineær funktion.
Grafen for g' går igennem punkterne $P\left(-\tfrac{1}{2},0\right)$ og $Q(0,1)$.

Bestem monotoniforholdene for funktionen g, og bestem førstekoordinaten til det punkt R, hvor tangenthældningen til grafen for f er den samme som tangenthældningen til grafen for g.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 7

I et koordinatsystem i planen er der givet et punkt $P(5,4)$ og en linje l med ligningen

$$x - y + 2 = 0 .$$

a) Bestem afstanden fra punktet P til linjen l.

En anden linje m er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathrm{R} .$$

b) Bestem skæringspunktet mellem linjerne l og m.

Opgave 8

Grafik: Colourbox

Tabellen viser omsætningen af biografbilletter i Kina i perioden 2006 - 2011.

Årstal	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Omsætning af biografbilletter (mio. USD)	329	434	607	909	1502	2030

I en model for udviklingen i omsætningen af biografbilletter i Kina gælder følgende

$$f(x) = b \cdot a^x ,$$

hvor $f(x)$ betegner omsætningen af biografbilletter (målt i mio. USD) til tidspunktet x (målt i år efter 2006).

a) Benyt tabellen til at bestemme konstanterne a og b.

b) Benyt modellen til at bestemme det år, hvor omsætningen af biografbilletter er 10000 mio. USD.

c) Benyt modellen til at bestemme den årlige gennemsnitlige vækstrate samt fordoblingstiden for omsætningen af biografbilletter.

Kilde: "Emerging markets and the digitalization of the film industry", UIS INFORMATION PAPER NO. 14, *August* 2013.

Opgave 9 Grafen for en funktion f på formen $f(x) = b \cdot x^a$ går igennem punkterne $A(3,100)$ og $B(15,50)$.

a) Bestem en forskrift for f.

b) Bestem $f(20)$, og bestem den procentvise ændring i $f(x)$, når x vokser med 70%.

Opgave 10 Et polynomium f er givet ved forskriften

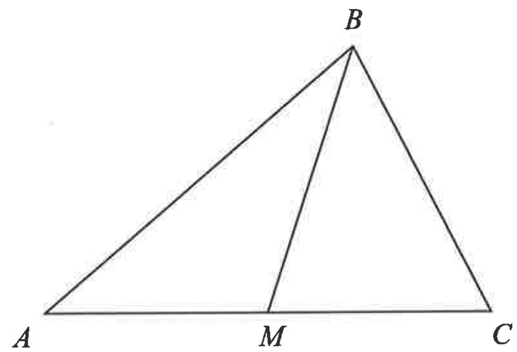
$$f(x) = x^6 - 5x^3 + 4 \ .$$

Det oplyses, at grafen for f har netop to skæringspunkter med førsteaksen.

a) Bestem koordinatsættet til hvert af disse skæringspunkter.

b) Bestem monotoniforholdene for f.

Opgave 11 I en trekant ABC er $|AB| = 13$. Midtpunktet af siden AC benævnes M, og det oplyses, at $|AM| = 7$ og $|BM| = 9$.



a) Bestem vinkel A, og bestem omkredsen af trekant ABC.

b) Bestem længden af højden fra B.

Opgave 12 I forbindelse med en forbrugerundersøgelse i en bestemt population vil man undersøge, om en tilfældig stikprøve på 300 forbrugere er repræsentativ med hensyn til alder. Nulhypotesen er derfor:

Aldersfordelingen i stikprøven følger aldersfordelingen i populationen.

I stikprøven er aldersfordelingen som vist i nedenstående tabel.

Alder	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-
Antal	39	42	83	54	49	21	12

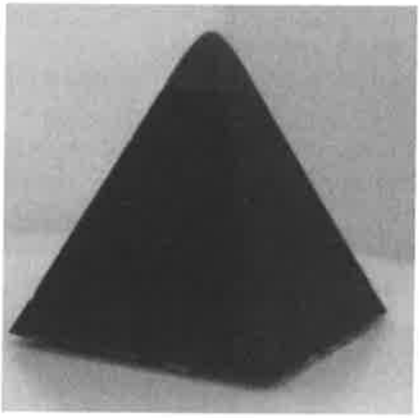
Aldersfordelingen i populationen er vist i nedenstående tabel.

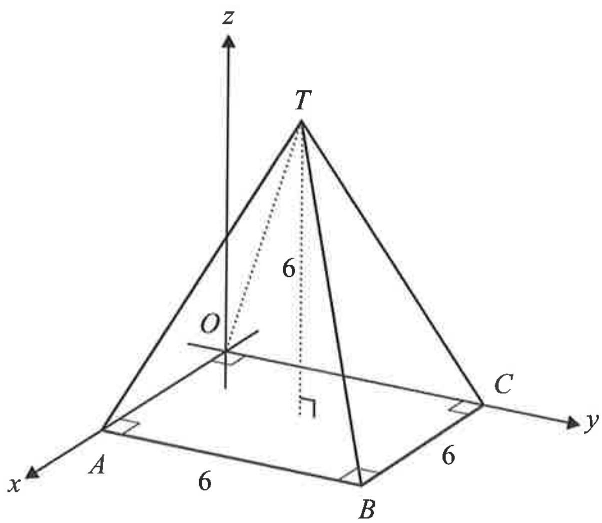
Alder	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-
Antal i %	15	16	19	17	17	10	6

a) Afgør, om nulhypotesen kan forkastes på et 5% signifikansniveau.

b) Angiv teststørrelsen, og redegør for, hvilken af aldersgrupperne der giver det største bidrag til teststørrelsen.

Opgave 13





Billedet ovenfor viser en flødebolle, der har form som en pyramide med kvadratisk bund. Toppunktet af pyramiden ligger på en linje, der står vinkelret på diagonalernes skæringspunkt i bunden. Den kvadratiske bund har sidelængden 6 cm, og afstanden fra toppunktet til bunden er 6 cm.

På figuren er en model af flødebollen indtegnet i et koordinatsystem med enheden 1cm.

a) Benyt modellen til at bestemme den vinkel, som en af flødebollens sider danner med flødebollens bund.

b) Benyt modellen til at bestemme det samlede overfladeareal af flødebollen inklusiv bunden.

Opgave 14 To funktioner f og g er givet ved forskrifterne

$$f(x) = a^x$$
$$g(x) = x + 1,$$

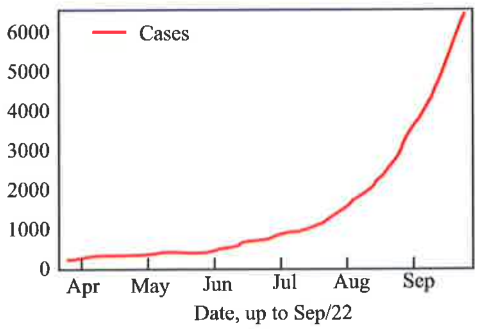
hvor $1 < a < 2$.

Graferne for f og g afgrænser i første kvadrant sammen med linjen med ligningen $x = 1$ en punktmængde M, der har et areal.

a) Bestem arealet af M, når $a = 1{,}5$.

b) Bestem a, så arealet af M er 0,4.

Opgave 15 Man har i perioden april til september 2014 opgjort antallet af personer, der er smittet med en bestemt virus i Vestafrika.
Figuren viser udviklingen i antallet af smittede efter første opgørelse.



For at beskrive udviklingen i antallet af smittede har man lavet to modeller.

I den første model antages det, at hastigheden, hvormed antallet af smittede vokser, er proportional med antallet af smittede.
I modellen måles tiden t i døgn (efter første opgørelse), proportionalitetskonstanten er 0,022, og der er 3800 smittede til tidspunktet $t = 162$.

a) Benyt den første model til at opstille en differentialligning, der beskriver udviklingen i antallet af smittede, og bestem hastigheden, hvormed antallet af smittede vokser til tidspunktet $t = 162$.

I den anden model antages det, at udviklingen i antallet af smittede som funktion af tiden opfylder differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot N \cdot (13382 - N),$$

hvor N betegner antallet af smittede til tidspunktet t målt i døgn (efter første opgørelse).

b) Benyt den anden model til at bestemme hastigheden, hvormed antallet af smittede vokser til tidspunktet $t = 162$, og sammenlign udviklingen i hastigheden, hvormed antallet af smittede vokser i de to modeller til tidspunktet $t = 162$.

Kilde: en.wikipedia.org/wiki/Ebola_virus_epidemic_in_West_Africa