
Matematik A

Studentereksamen

Skriftlig prøve
(5 timer)

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-5 med i alt 5 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 6-17 med i alt 19 spørgsmål.

De 24 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION og LAY-OUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE og DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 I et koordinatsystem i planen er givet en vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ og et punkt $P(3,8)$.

Bestem en ligning for den linje l , der går gennem P og er parallel med $\vec{a}$.

Opgave 2 Gør rede for, at funktionen $f(x) = x^2 \cdot e^x$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + y.$$

Opgave 3 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 4x^3 - 8x.$$

Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(1,5)$.

Opgave 4 Der løber vand ud af en beholder, således at vandmængden i beholderen som funktion af tiden er givet ved

$$m(t) = -3t + 85,$$

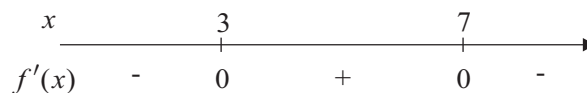
hvor $m(t)$ er vandmængden i beholderen (målt i liter) til tidspunktet t (målt i minutter).

Gør rede for, hvad tallene i forskriften fortæller om vandmængden i beholderen.

Opgave 5 Tegn en mulig graf for en funktion f , der opfylder, at

$$f(0) = 5 \text{ og } f(10) = -1,$$

og at fortegn og nulpunkter for f' er som angivet på tallinjen:



Besvarelsen afleveres kl. 10.00
--

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 - 14.00

Opgave 6 Nedenstående tabel viser aldersfordelingen af 72 lærere, der er ansat på et bestemt gymnasium.

alder	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
antal	1	19	5	33	14

a) Tegn sumkurven, og bestem kvartilsættet.

Opgave 7 To vektorer er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Bestem projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

b) Bestem arealet af det parallellogram, som udspændes af de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Opgave 8 Verdens årlige IP-trafik måles i pentabytes. Tabellen viser verdens årlige IP-trafik for årene 2006-2008.

År	2006	2007	2008
IP-trafik	50808	78924	128964

I en model antages det, at den årlige IP-trafik P (målt i pentabytes) som funktion af tiden t (målt i år efter 2006) med tilnærmelse kan beskrives ved sammenhængen

$$P = P_0 \cdot a^t,$$

hvor P_0 og a er tal.

a) Benyt tabellens data til at bestemme tallene P_0 og a .

I 2006 udgjorde den private årlige IP-trafik 31692 pentabytes.

b) Opstil en funktion, der beskriver udviklingen i den private årlige IP-trafik efter 2006, når væksten pr. år er 49%, og bestem fordoblingstiden.

Opgave 9 I en model er vægten af en bestemt fisk som funktion af fiskens alder givet ved

$$w = 20 \cdot (1 - 0,89 \cdot e^{-0,17 \cdot t})^3,$$

hvor w er vægten (målt i kg), og t er alderen (målt i år).

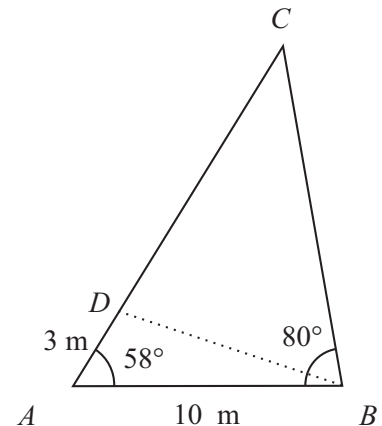
- Benyt modellen til at bestemme fiskens vægt, når den er 3 år.
- Bestem fiskens alder, når fiskens vægt er 13 kg.

Opgave 10 På figuren ses en skitse af en stålkonstruktion bestående af fire stålstænger. I trekant ABC er $\angle A = 58^\circ$ og $|AB| = 10$ m. Stålstangen BC danner en vinkel på 80° med AB .

- Bestem længden af BC .

Stålstangen BD er fastgjort i D , således at afstanden fra A til D er 3 m.

- Bestem længden af BD .

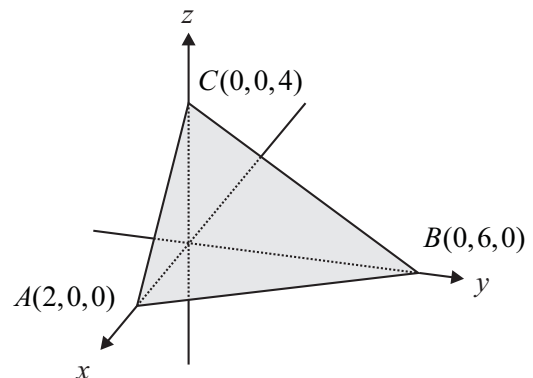


Opgave 11 Figuren viser en trekant ABC i et koordinatsystem i rummet.

- Bestem en ligning for den plan α , der indeholder trekant ABC .

En linje l er bestemt ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



- Bestem vinklen mellem l og α .
- Bestem en ligning for den kugle, der har centrum i $O(0,0,0)$ og α som tangentplan.

Opgave 12 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 \ln(x) - 3x - 1, \quad x > 0.$$

- Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.
- Benyt $f'(x)$ til at argumentere for forløbet af grafen for f .

Opgave 13 To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{64}x^2 \quad \text{og} \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

Graferne for funktionerne f og g afgrænser i første kvadrant en punktmængde M , der har et areal.

a) Bestem arealet af M .

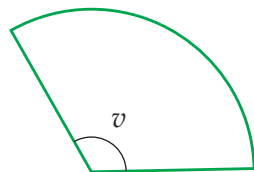
Opgave 14 I en model for udviklingen i antallet af bakterier i en bakteriekultur betegner $B(t)$ antallet af bakterier til tiden t (målt i døgn). I modellen antages det, at

$$\frac{dB}{dt} = 1,55 \cdot 10^{-4} \cdot B \cdot (2000 - B).$$

Det oplyses, at der til tidspunktet $t = 0$ er 50 bakterier i bakteriekulturen.

a) Bestem antallet af bakterier i bakteriekulturen efter 15 døgn.

Opgave 15 I en have skal anlægges et blomsterbed, der har form som et cirkeludsnit (se figuren).



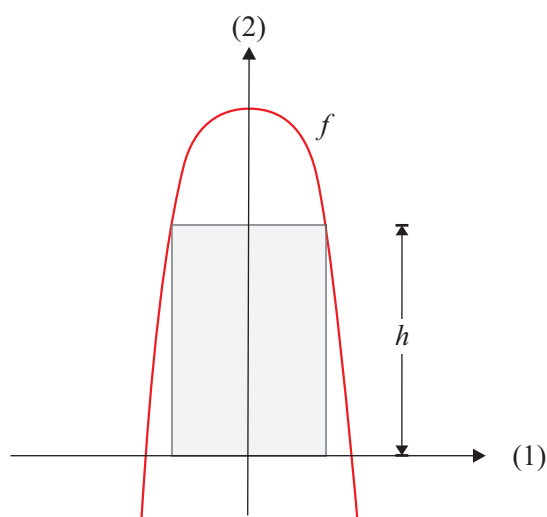
Det oplyses, at arealet af blomsterbedet som funktion af vinklen v (målt i radianer) er

$$A(v) = \frac{200v}{(v+2)^2}.$$

a) Bestem v , så arealet af blomsterbedet bliver størst muligt.

opgavesættet fortsætter

Opgave 16 En funktion f er bestemt ved $f(x) = 5 - x^4$.



Et rektangel med højden h , hvor $0 < h < 5$, er placeret som vist på figuren.

- a) Bestem bredden af rektanglet udtrykt ved h , og bestem arealet af rektanglet udtrykt ved h .

Opgave 17 Der løber vand fra en vandhane ned i et badekar med en hastighed på 0,4 L/s. Bundproppen i badekaret er lidt utæt, så vandet løber samtidigt ud af badekarret med en hastighed, der er proportional med vandmængden i badekarret (målt i L). Det oplyses, at proportionalitetskonstanten er $0,001 \text{ s}^{-1}$.

- a) Indfør passende variable, og opstil en differentialligning, der beskriver, hvordan vandmængden i badekarret ændrer sig med tiden.

