

MATEMATIK
A-NIVEAU

Onsdag den 12. august 2009

Kl. 09.00 – 14.00

STX092-MAA

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-5 med i alt 5 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 6-17 med i alt 19 spørgsmål.

De 24 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

”I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart, herunder om der i opgavebesvarelsen er:

- en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på
- en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik
- en dokumentation ved et passende antal mellemregninger
- en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde, herunder den eventuelle brug af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder
- en brug af figurer og illustrationer
- en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer
- en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden
- en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og med brug af almindelig matematisk notation.”

(Undervisningsvejledningen til Matematik, Stx)

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 En ret linje l går gennem punkterne $P(1, -6)$ og $Q(-2, 3)$.

Bestem en ligning for l , og bestem koordinatsættet til hvert af linjens skæringspunkter med akserne.

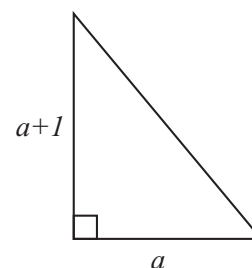
Opgave 2 En kugle er givet ved ligningen

$$x^2 + 6x + y^2 - 14y + z^2 + 2z + 23 = 0.$$

Bestem koordinatsættet til kuglens centrum og kuglens radius.

Opgave 3 På figuren ses en retvinklet trekant med kateterne a og $a+1$.

Bestem for $a = 3$ længden af hypotenusen, og bestem a , når længden af hypotenusen er $\sqrt{13}$.



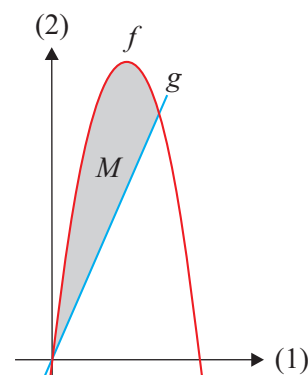
Opgave 4 To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = -4x^2 + 20x$$

$$g(x) = 8x.$$

Graferne for de to funktioner afgrænser et område M , der har et areal (se figuren).

Bestem førstekoordinaten til hvert af skæringspunkterne mellem graferne for f og g , og bestem arealet af området M .



Opgave 5 Undersøg, om $f(x) = e^{4x} - 2x^2 - x - \frac{1}{4}$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 4y + 8x^2.$$

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 - 14.00

Opgave 6 I et koordinatsystem er to vektorer \vec{a} og \vec{b} bestemt ved

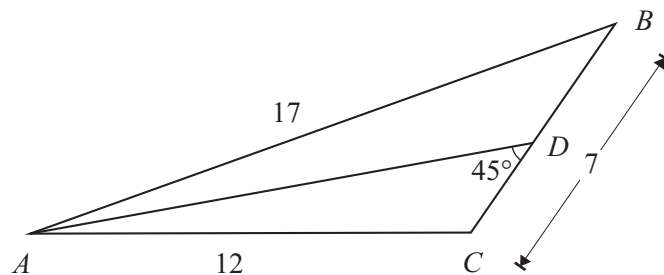
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Bestem vinklen mellem \vec{a} og \vec{b} .
- Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af \vec{a} og \vec{b} .
- Bestem projektionen af \vec{b} på \vec{a} .

Opgave 7 I trekant ABC er $a = 7$, $b = 12$ og $c = 17$.

- Bestem $\angle C$.

Punktet D ligger på BC , så vinkel D i trekant ADC er 45° (se figuren).



- Bestem $|AD|$.

Opgave 8 Af tabellen fremgår, hvor mange børn der efter 1997 er blevet behandlet for ADHD, dvs. forstyrrelse af opmærksomhed, aktivitet og impulsivitet.

| År | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Antal | 511 | 697 | 954 | 1305 | 1525 | 1921 | 2490 | 3284 | 4452 | 5804 | 7180 |

Det antages, at tabellens data kan beskrives ved en funktion af typen

$$N(t) = N_0 \cdot a^t,$$

hvor $N(t)$ er antallet af børn i behandling for ADHD til tiden t (målt i år efter 1997).

- Benyt tabellens data til at bestemme tallene N_0 og a .
- Gør rede for, hvad tallet a fortæller om udviklingen i antallet af børn i behandling for ADHD, og benyt den fundne forskrift til at bestemme det forventede antal børn i behandling for ADHD i 2010.

Kilde: "Medicinalindustrien har brug for diagnoser som ADHD" i Asterisk nr. 42, sep-okt 2008, DPU.

Opgave 9 I en operaforening er aldersfordelingen som vist i tabellen.

| | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|
| Alder (år) | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |
| Antal | 2 | 8 | 4 | 10 | 3 |

a) Tegn et boksplot, og beregn middelværdien.

Opgave 10 I en model antages det, at en populations vækst kan beskrives ved differentiaalligningen

$$N' = 4 \cdot 10^{-6} \cdot N \cdot (K - N),$$

hvor N er antallet af individer til tiden t (målt i år). Endvidere antages det, at $N(0) = 10000$ og $N'(0) = 2000$.

- a) Bestem K .
- b) Bestem væksthastigheden, når antallet af individer i populationen er 35000.

Opgave 11 Sammenhængen mellem antal fuglearter og størrelsen af den sø, de lever ved, kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = b \cdot x^{0,25}, \quad 1000 \leq x \leq 64000,$$

hvor $f(x)$ er antallet af fuglearter ved søen, og x er søens overfladeareal (målt i m^2).

- a) Bestem tallet b , når det oplyses, at der er 3 fuglearter ved en sø med overfladeareal 1650 m^2 , og bestem overfladearealet af en sø med 6 fuglearter.

Om to søer S_1 og S_2 gælder, at $x_2 = 10 \cdot x_1$, hvor x_1 er overfladearealet af S_1 , og x_2 er overfladearealet af S_2 . Endvidere gælder, at $f(x_2) = k \cdot f(x_1)$.

- b) Bestem k , og beskriv, hvad dette tal fortæller om antallet af fuglearter ved de to søer.

Kilde: Kaj Sand-Jensen: Søer – en beskyttet naturtype, Gads Forlag, ISBN 87-12-03709-5.

Opgave 12 En funktion $f(x)$ er givet ved

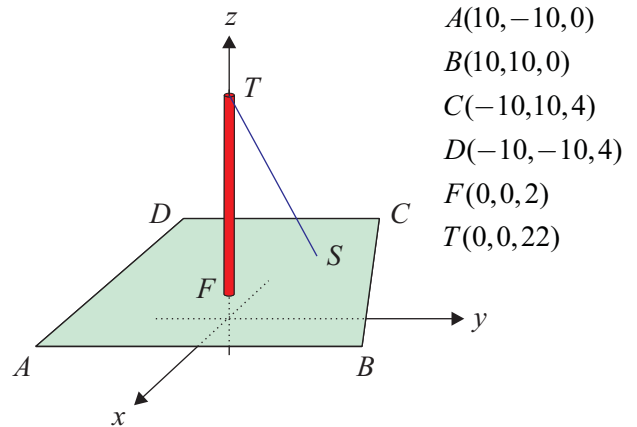
$$f(x) = e^{-x^2+2x+1}.$$

- a) Gør rede for, at $f(x)$ har et maksimum.

Opgave 13

På figuren ses et koordinatsystem, hvori der er indtegnet et rektangulært skråplan $ABCD$ og en lodret mast FT . Masten er forankret i skråplanet med 4 wirer. En af disse wirer er fastgjort i punktet S , og er parallel med vektoren

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -19 \end{pmatrix}.$$



- Bestem en parameterfremstilling for linjen gennem T og S , og bestem en ligning for den plan, som skråplanet ligger i.
- Bestem koordinatsættet til S , og bestem længden af wiren TS .

Opgave 14

Om en funktion F gælder, at $F(x)$ er stamfunktion til

$$f(x) = -x^3 + 3x.$$

Linjen t med ligningen $y = -2x + 8$ er tangent til grafen for F , og det oplyses, at røringsspunktet for t har negativ førstekoordinat.

- Bestem en forskrift for F .

Opgave 15

På figuren ses grafen for funktionen

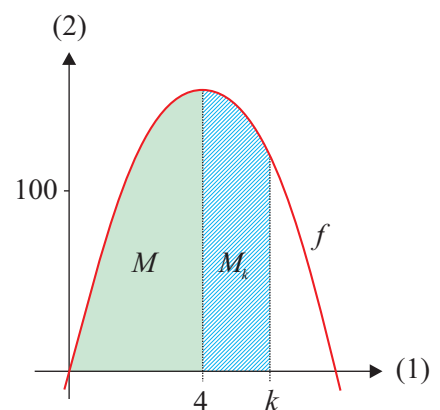
$$f(x) = 80x - 10x^2$$

samt to punktmængder M og M_k .

Punktmængden M er afgrænset af grafen for f , koordinatsystemets førsteakse samt linjen med ligningen $x = 4$.

Punktmængden M_k er afgrænset af grafen for f , koordinatsystemets førsteakse samt linjerne med ligningerne $x = 4$ og $x = k$, hvor $k > 4$.

Når punktmængderne M og M_k drejes 360° om førsteaksen, fremkommer to omdrejningslegemer med rumfang V og V_k .



- Bestem V , og bestem k , så $V_k = \frac{1}{2}V$.

Opgave 16 Ved en bestemt sygdom tilføres en patient medicin intravenøst over en femtimers periode. Medicinen tilføres kontinuerligt med en bestemt mængde p (målt i μg) pr. time. Den mængde medicin M (målt i μg), som til tidspunktet t (målt i timer) er i patientens blodbaner, opfylder differentialligningen

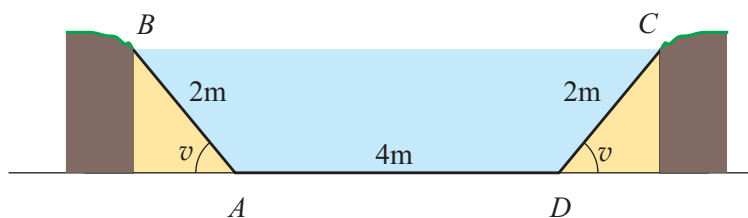
$$\frac{dM}{dt} = p - 0,03M,$$

hvor $M(0) = 0$.

For at kurere sygdommen skal patienten efter 3 timer have $100 \mu\text{g}$ af medicinen i blodbanerne.

a) Bestem en forskrift for M som funktion af t udtrykt ved p , og bestem mængden p .

Opgave 17 Figuren viser et lodret snit $ABCD$ gennem en kanal, hvis tværsnit har form som et trapez.



Arealet af kanalens tværsnit er en funktion T af vinklen v , hvor v måles i radianer og $0 < v \leq \frac{\pi}{2}$.

a) Gør rede for, at

$$T(v) = 8 \sin v + 4 \sin v \cos v,$$

og bestem v , så arealet af kanalens tværsnit bliver størst mulig.

