STUDENTEREKSAMEN AUGUST 2008

MATEMATIK
A-NIVEAU

Onsdag den 13. august 2008

Kl. 09.00 – 14.00

NY ORDNING

STX082-MAA

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-5 med i alt 5 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 6-17 med i alt 18 spørgsmål.

Kun én af opgaverne 17a og 17b må afleveres til bedømmelse.

De 23 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

"I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart, herunder om der i opgavebesvarelsen er:

- en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på
- en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik
- en dokumentation ved et passende antal mellemregninger
- en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde, herunder den eventuelle brug af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder
- en brug af figurer og illustrationer
- en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer
- en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden
- en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og med brug af almindelig matematisk notation."

(*Undervisningsvejledningen til Matematik, Stx*)

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 Reducér udtrykket $(a-b)^2+2b(a-b)$, og reducér udtrykket $\dfrac{3x-3y}{x^2-2xy+y^2}$.

Opgave 2 I et koordinatsystem er to vektorer givet ved

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

Bestem t, så vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale, og bestem t, så vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

Opgave 3 Funktionen $f(x)=b\cdot x^a$ opfylder, at

$$f(2)=2 \ \text{ og } \ f(4)=16\,.$$

Bestem tallene a og b.

Opgave 4 Bestem afstanden fra punktet $P(2,3,-1)$ til planen α med ligningen

$$4x-2y+4z-5=0.$$

Opgave 5 Gør rede for, at funktionen $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+3$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx}=2y-6.$$

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 - 14.00

Opgave 6

Kilde: Acciona-energia

År	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Solenergi (MW)	7	11,7	15,6	22,6	32,8	49,4	68,9	116,4

Tabellen viser for hvert af årene 1999-2006 mængden af udvundet solenergi i Spanien. I en model antages det, at den udvundne solenergi P (målt i MW) som funktion af tiden t (målt i år efter 1999) med tilnærmelse kan beskrives ved sammenhængen

$$P = P_0 \cdot a^t ,$$

hvor P_0 og a er tal.

a) Benyt tabellens data til at bestemme tallene P_0 og a.

b) Benyt modellen til at forudsige mængden af udvundet solenergi i Spanien i år 2008 samt til at forudsige, hvornår udvindingen af solenergi i Spanien overstiger 400 MW.

Opgave 7 I trekant ABC betegnes skæringspunktet mellem siden a og vinkelhalveringslinjen v_A med D. Det oplyses, at $\angle A = 66^\circ$, $c = 4{,}7$ og $v_A = 3{,}9$.

a) Tegn en model af trekanten, og bestem $|BD|$.

b) Bestem $\angle B$ og $\angle C$.

Opgave 8 I et koordinatsystem i rummet har en kugle ligningen

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z + 4 = 0\,,$$

og punktet $P(1,-1,4)$ ligger på kuglen.

a) Bestem kuglens radius og koordinatsættet til dens centrum.

b) Bestem en ligning for tangentplanen til kuglen i P.

Planen α er bestemt ved ligningen

$$3x + 4y - z = 2\,,$$

og linjen l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},\ t \in \mathrm{R}.$$

c) Bestem vinklen mellem l og α.

Opgave 9 I perioden 1980-2000 kan antallet af retspsykiatriske patienter under tilsyn beskrives ved modellen

$$f(t) = 297 \cdot 1{,}0679^t, \quad 0 \le t \le 20\,,$$

hvor $f(t)$ er antallet af retspsykiatriske patienter under tilsyn til tidspunktet t (målt i år efter 1980).

a) Bestem fordoblingstiden for $f(t)$.

b) Gør rede for, hvad konstanterne i modellen fortæller om udviklingen i antallet af retspsykiatriske patienter under tilsyn i perioden 1980-2000.

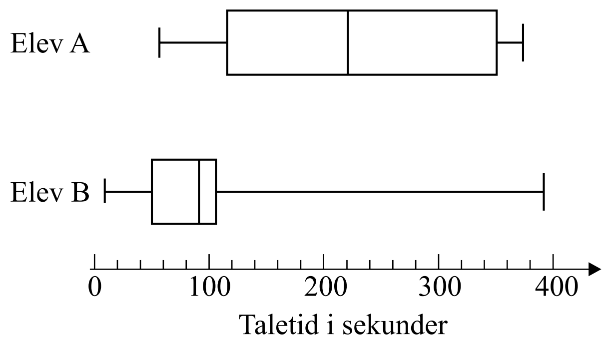
Opgave 10 Ved stegning af en bestemt steg kan temperaturen i stegens indre beskrives ved funktionen

$$I(t) = 200\left(1 - 0{,}9 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0091 \cdot t}\right),$$

hvor $I(t)$ er temperaturen i stegens indre (målt i $^\circ\mathrm{C}$), og hvor t angiver tiden efter, at stegen er sat i ovnen (målt i minutter).

a) Bestem, temperaturen i stegen 20 minutter efter at stegen er sat i ovnen, og bestem tiden, efter at stegen er sat i ovnen, som funktion af temperaturen i stegens indre.

Opgave 11 To elever, A og B, ønsker at sammenligne deres taletid i mobiltelefon. De indsamler derfor over samme periode taletiden på alle deres mobilsamtaler. Nedenfor ses resultatfordelingerne afbildet i to boksplot.



a) Sammenlign de to elevers taletid ud fra de to boksplot ved at inddrage kvartilsættene.

Opgave 12 I en model betegner $O(x)$ (målt i kr.) en virksomheds samlede omkostninger ved en produktion på x enheder af et bestemt produkt. Den pris pr. enhed, som virksomheden kan sælge samtlige x enheder for, betegnes $a(x)$ (målt i kr.). I modellen antages det, at

$$O(x) = 0{,}0024 \cdot x^2 + 10^6 \text{ og } a(x) = -0{,}008x + 1300 .$$

I modellen kan virksomhedens fortjeneste ved salg af samtlige x enheder bestemmes ved

$$F(x) = x \cdot a(x) - O(x) .$$

a) Bestem en forskrift for $F(x)$, og benyt forskriften til at bestemme det antal enheder, som virksomheden skal fremstille for at gøre fortjenesten størst mulig.

Opgave 13 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 4\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}x^2, \quad x \geq 0 .$$

a) Bestem monotoniforholdene for f.

Grafen for f og koordinatsystemets førsteakse afgrænser i første kvadrant et område M, som har et areal.

b) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes $360°$ omkring koordinatsystemets førsteakse.

Opgave 14 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot y + 1,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(1,4)$.

a) Bestem en forskrift for f.

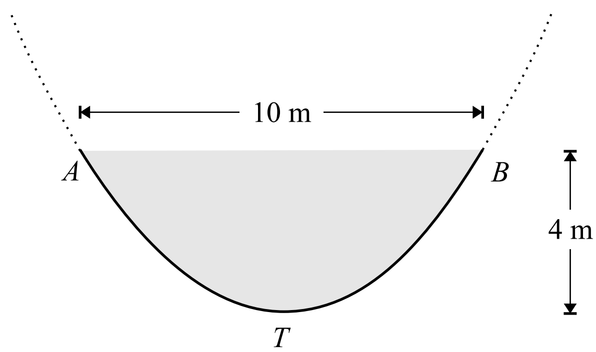
Opgave 15 I en model antages det, at en bestemt populations vækst er sådan, at antallet N af individer i populationen til tidspunktet t (målt i døgn) tilfredsstiller differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = \frac{0{,}08t - 1}{t} N, \quad t > 0{,}5.$$

Det oplyses, at antallet af individer i populationen til tidspunktet $t = 1$ er $1{,}2 \cdot 10^6$.

a) Benyt modellen til at bestemme populationens væksthastighed til tidspunktet $t = 1$, og bestem det tidspunkt, hvor antallet af individer i populationen er mindst.

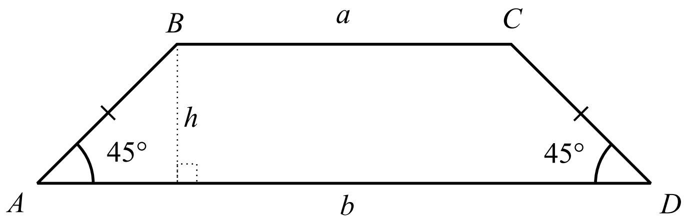
Opgave 16

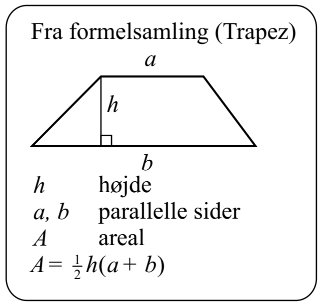


Et bassin har et lodret tværsnit, hvis form er en del af en parabel med toppunkt T (se skitsen). Bassinets største bredde AB er 10 m, og dets dybde er 4 m.

a) Tegn en model af tværsnittet i et passende koordinatsystem, og bestem en ligning for parablen i dette koordinatsystem.

Opgave 17a





I et ligebenet trapez $ABCD$ er $|AB| = |CD|$ og $\angle BAD = \angle ADC = 45°$. Det oplyses endvidere, at arealet af trapez $ABCD$ er 10.

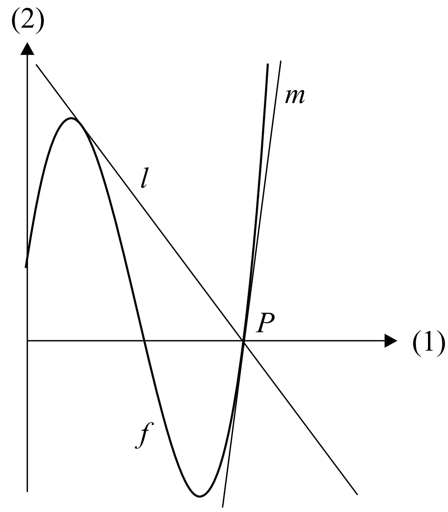
a) Bestem $|AB|$ udtrykt ved h, og bestem omkredsen af trapezet som funktion af h.

Opgave 17b En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 5.$$

Tangenten til grafen for f i punktet $P(5, f(5))$ kaldes m. Som det ses på figuren, har grafen for f også en anden tangent l, der går igennem P.

a) Bestem en ligning for m, og bestem førstekoordinaten til røringspunktet for l.



Kun én af opgaverne 17a og 17b må afleveres til bedømmelse

UNDERVISNINGS
MINISTERIET