

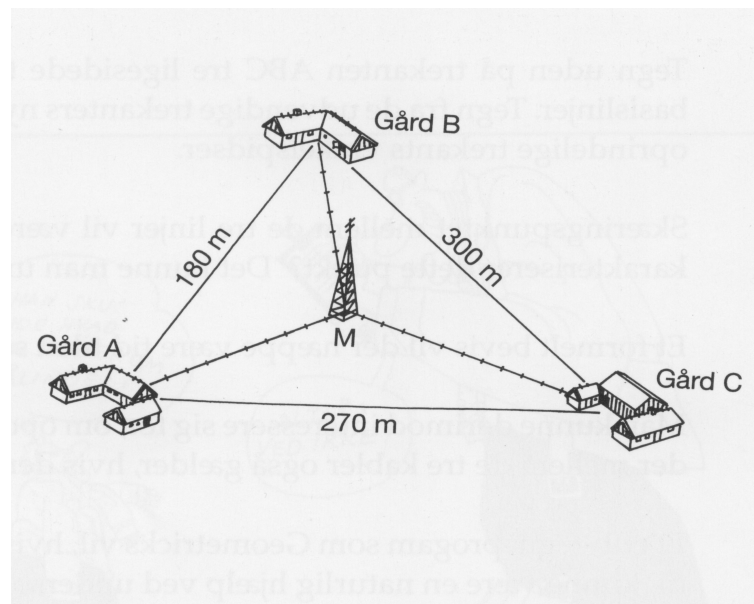
Minimering af samlet kabellængde

En lærervejledning

Ib Michelsen

Ikast 2007

Opgaven



Opgaven går ud på at placere masten, så det samlede kabelforbrug minimeres. Opgaven stammer fra en afgangsprøve i Folkeskolen.¹

Ideen

Eleverne skal prøve sig frem. Oprindeligt havde jeg kun regnearket, hvor eleverne ved at gætte på kabellængden, kunne se de punkter i planet, hvor kabellængden højst var det gættede tal.

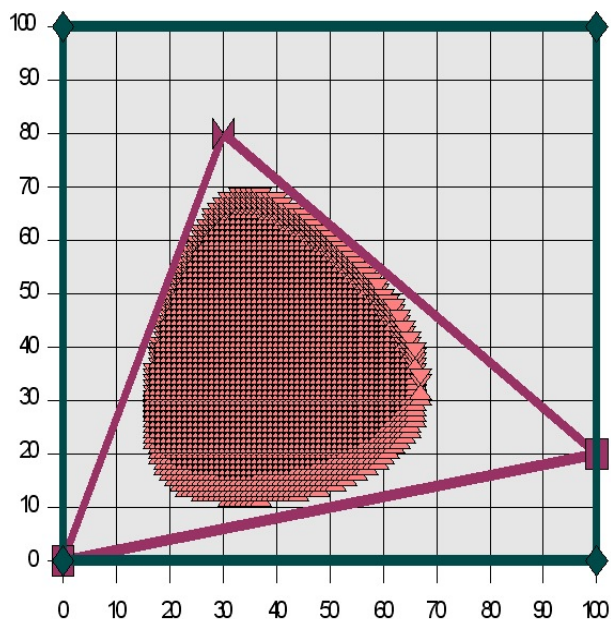
Senere er hjemmesiden kommet til: her kan masten direkte flyttes og samtidig beregnes summen af afstandene; dvs. den samlede kabellængde.

I begge tilfælde kan eleverne se den optimale løsning - mere eller mindre præcist. Ved at gentage undersøgelsen for en række trekanter ("placering af gårde"), kan man måske formulere betingelser for et optimum, måske kan andre falsificere påstanden med modeksempel ...

¹"Vejledende opgavesamling for folkeskolens afsluttende prøver i matematik", UVM, 1996

"Et formelt bevis vil der næppe være tid til at se på."

"Oplægget vil kunne bruges ved mundtlig prøve både efter 9. og 10. klassetrin."



Elevens arbejde

Når regnearket er åbnet, kan eleven kun indtaste gårdenes koordinater og et gæt på den samlede afstand. Alle andre celler er låst og arket er beskyttet. Beskyttelsen kan nemt fjernes: der er intet password. Hvis der gættes for højt, vil regnearket i løbet af nogle sekunder vise en figur som ovenstående, gætter man for lavt, ses kun trekanten.

Når masten kan placeres præcist udskrives diagrammet og kablerne indtegnes. Efter et passende antal forsøg skal eleverne opdage et mønster, formulere det, og med ført hånd bevise deres opdagelser (i større eller mindre omfang.)

Nogle sætninger

Lemma I

Givet $\triangle ABC$, hvor alle vinkler er mindre end 120° :

En nødvendig betingelse for et optimum P er:

At **cirklen** med A som centrum og $|AP|$ som radius og

At den **ellipse**, som P ligger på, og som har brændpunkterne B og C

har fælles tangent

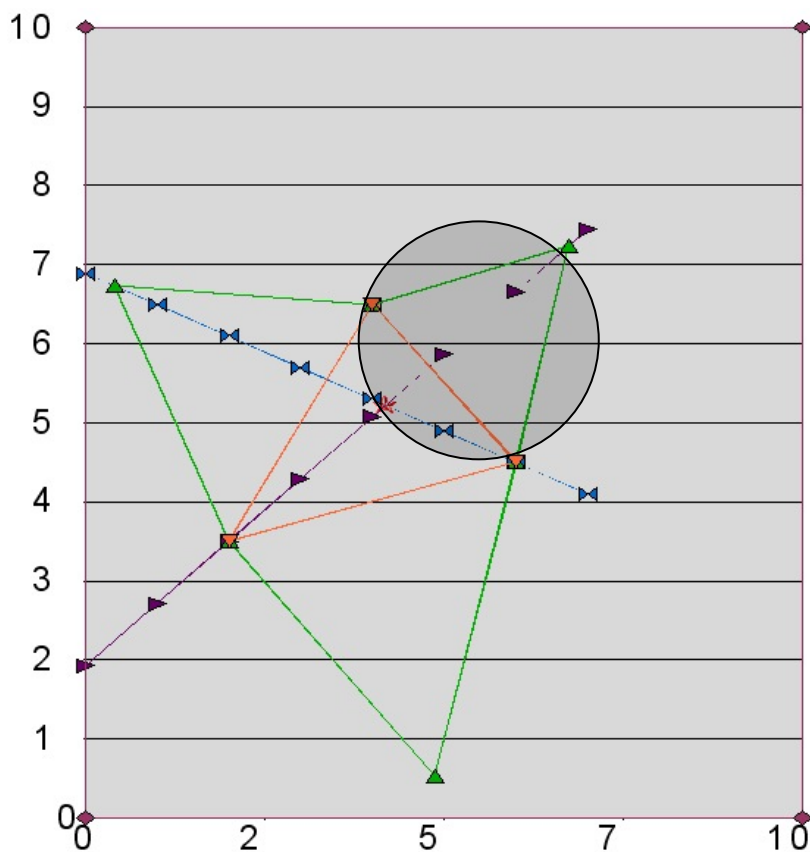
Sætning

Summen af "kabel længderne" minimeres i en trekant, hvor alle vinkler er mindre end 120° , hvis og kun hvis:

Vinklen mellem ethvert par kabler er 120° .

Lemma II

Hvis **trekanten** har alle vinkler mindre end 120° , kan optimum P findes som skæringspunkt for de omskrevne cirkler til **de ligesidede trekanter** dannet af den oprindelige trekants sider.



Lemma III

P ligger på linjen, der forbinder en af den oprindelige trekants hjørner med det hjørne i den ligesidede trekant på den modstående side, som ligger uden for den oprindelige trekant.