Trigonometri

Vinkel v	sin(v)	Vinkel v	sin(v)	Vinkel v	sin(v)
0,00	0,00	30,00	0,50	60,00	0,87
1,00	0,02	31,00	0,52	61,00	0,87
2,00	0,03	32,00	0,53	62,00	0,88
3,00	0,05	33,00	0,54	63,00	0,89
4,00	0,07	34,00	0,56	64,00	0,90
5,00	0,09	35,00	0,57	65,00	0,91
6,00	0,10	36,00	0,59	66,00	0,91
7,00	0,12	37,00	0,60	67,00	0,92
8,00	0,14	38,00	0,62	68,00	0,93
9,00	0,16	39,00	0,63	69,00	0,93
10,00	0,17	40,00	0,64	70,00	0,94
11,00	0,19	41,00	0,66	71,00	0,95
12,00	0,21	42,00	0,67	72,00	0,95
13,00	0,23	43,00	0,68	73,00	0,96
14,00	0,24	44,00	0,69	74,00	0,96
15,00	0,26	45,00	0,71	75,00	0,97
16,00	0,28	46,00	0,72	76,00	0,97
17,00	0,29	47,00	0,73	77,00	0,97
18,00	0,31	48,00	0,74	78,00	0,98
19,00	0,33	49,00	0,75	79,00	0,98
20,00	0,34	50,00	0,77	80,00	0,98
21,00	0,36	51,00	0,78	81,00	0,99
22,00	0,37	52,00	0,79	82,00	0,99
23,00	0,39	53,00	0,80	83,00	0,99
24,00	0,41	54,00	0,81	84,00	0,99
25,00	0,42	55,00	0,82	85,00	1,00
26,00	0,44	56,00	0,83	86,00	1,00
27,00	0,45	57,00	0,84	87,00	1,00
28,00	0,47	58,00	0,85	88,00	1,00
29,00	0,48	59,00	0,86	89,00	1,00
30,00	0,50	60,00	0,87	90,00	1,00

Ikast 2017

Ib Michelsen

Ib Michelsen

Matematik A: Trigonometri

Sidst ændret: 22-2-2017

Typografi sider: FS, P2, H1, SV, SH

Indholdsfortegnelse

Introduktion....5
Ligedannede trekanter....7
Ensvinklede trekanter....8
Den typiske opgave....9
Eksamensopgave med besvarelse....10
Sinusfunktionen....13
Om vinkler....14
Definition af sinusfunktionen....15
Standardtrekanter....15
Definitioner og sætninger....19
Definition af cosinusfunktionen....19
Sætning....19
Sætning: mk = hyp·sin(v)....19
Sætning: hk = hyp·cos(v)....20
Definition: tan(A)....20
Sætning: 20
Retvinklede trekanter....21
Pythagoras sætning....21
Den omvendte sætning (af Pythagoras sætning)....21
Opgaver om retvinklede trekanter....21
Eksempel I: kendt spids vinkel og hypotenuse....21
Eksempel II: kendt spids vinkel og modstående katete....22
Eksempel III: kendt katete og hypotenuse....22
Eksempel IV: kendte kateter....24
Øvelser for én eller et par....24
Eksamensopgave med besvarelse....25
Model....26
Skævvinklede trekanter....27
Sinusrelationerne....28
Sætning om sinusrelationerne....28
2. arealsætning....29
Cosinusrelationerne....30
Opgaver om skævvinklede trekanter....31
Eksempel I: SSS (tre sider kendte)....32
Eksempel II: SVS (to sider kendte samt den mellemliggende vinkel)....32
Eksempel III: VSV (to vinkler kendte samt den mellemliggende side)....33
Eksempel IV: VSS (hvor en vinkel og en hosliggende og en modstående side er kendt)....34
Eksamensopgave med besvarelse....35
Danmarkskort....37
Johannes Mejers kort....37

Trianguleringen i Danmark....38
Målebordsblade....39
Oversigt....41
Kilder....43
Stikordsregister....45

Introduktion

Trigonometri er studiet af trekanter. Grunden til at trekanten benyttes er, at den er en meget enkel figur, hvori beregningerne er forholdsvis lette. Samtidig kan enhver *polygon* (det betyder mangekant) opdeles i trekanter. Firkanten deles for eksempel af diagonalen i to trekanter. I den forbindelse er det ved beregninger en stor hjælp at kunne benytte sig af tabeller som korde- og sinustabeller.

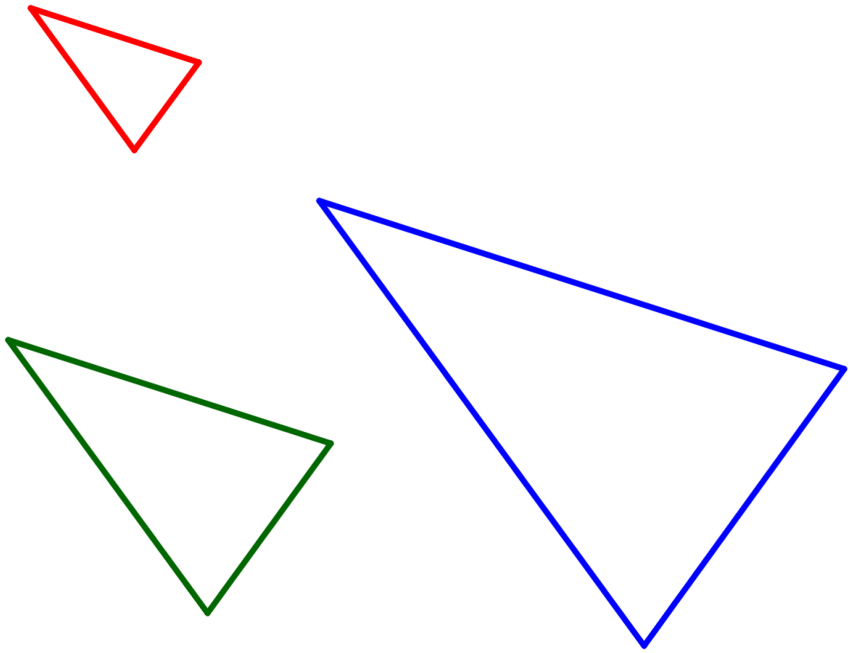
De første trigonometriske tabeller er ikke sinustabeller, men kordetabeller , som viser sammenhængen mellem centervinklens størrelse og den tilsvarende kordelængde. Disse tabeller skyldes grækeren Hipparchos (190 fvt. - 120 fvt.), som benyttede dem i arbejdet med at beskrive månens og solens bevægelser. Disse tabeller var dog et generelt middel til at løse alle mulige trekantsopgaver.

Men vejen fra det antikke Grækenland til det moderne Europa blev lang. Studierne af trekanterne fortsatte i Indien, hvor sinusfunktionen optræder første gang. Senere blev studierne fortsat af araberne for endelig i 1500-tallet at komme tilbage til Europa.

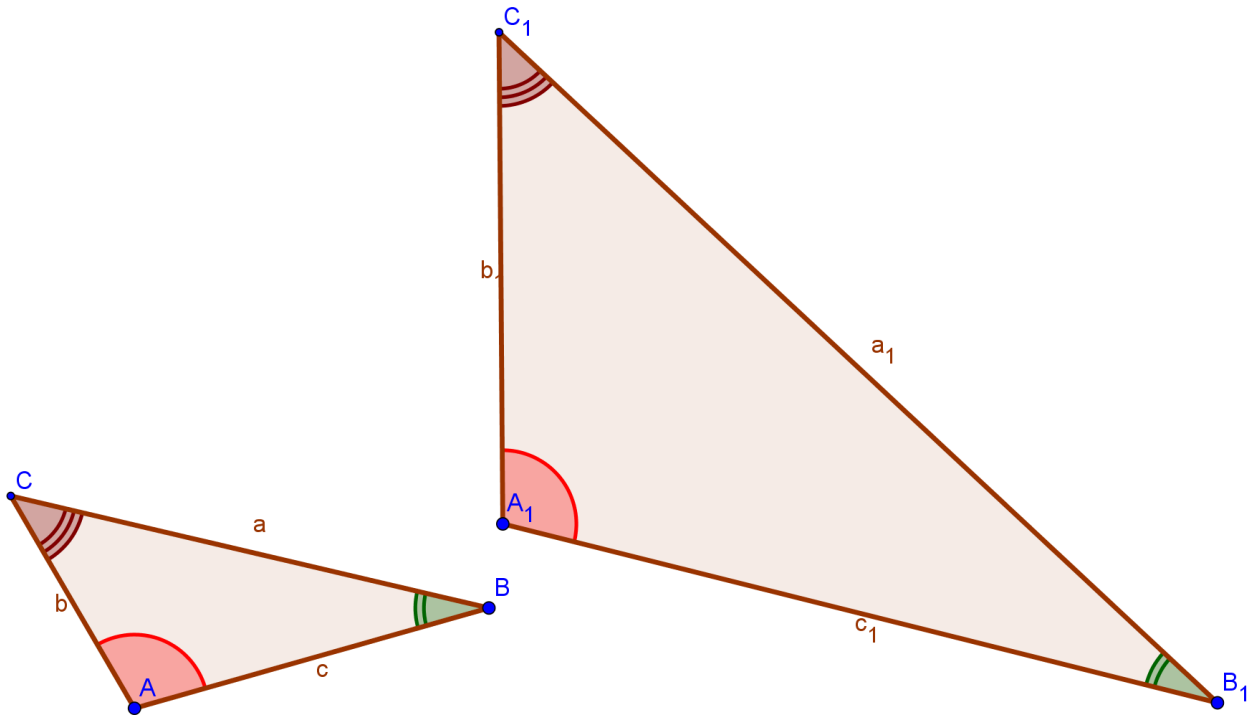
Selvom geometrien ikke begynder med Euklids arbejder. så lad os starte med Euklid. I årene omkring 300 fvt. systematiserede han den kendte viden om geometri: Han startede med 23 definitioner i Bog I fra punkt, linje over vinkler og cirkler til den sidste om parallelle linjer, han klargjorde sine forudsætninger (aksiomer, grundsætninger der ikke bevises) og almindelige begreber. Hvorefter sætning efter sætning vises og bevises.

Men lad os starte ikke med begyndelsen, men med et hurtigt hop til Bog VI, sætningerne 4 og 5.

Ligedannede trekanter



Ensvinklede trekanter



Herover ses to *ensvinklede trekanter*. Det betyder, at for hver vinkel i den ene trekant findes der en vinkel i den anden, der er præcis lige så stor. For at præcisere hvilke vinkler, der er lige store, har de fået samme udsmykning (1, 2 eller 3 buer) og til overflod her også samme farve.

For sådanne trekanter er der et fast forhold mellem tilsvarende sider, dvs.:

$k = \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$ eller

$a_1 = k \cdot a$
$b_1 = k \cdot b$
$c_1 = k \cdot c$

Det kan også være nyttigt at vide, at for trekanter gælder den omvendte sætning: At hvis der er et fast størrelsesforfold mellem tilsvarende sider i to trekanter, så er trekanterne ensvinklede. (Jævnfør Euklid, Bog VI, sætning 5.)

Figurer med ens vinkler og et fast størrelsesforhold mellem siderne kaldes *ligedannede*.

Øvelse 1

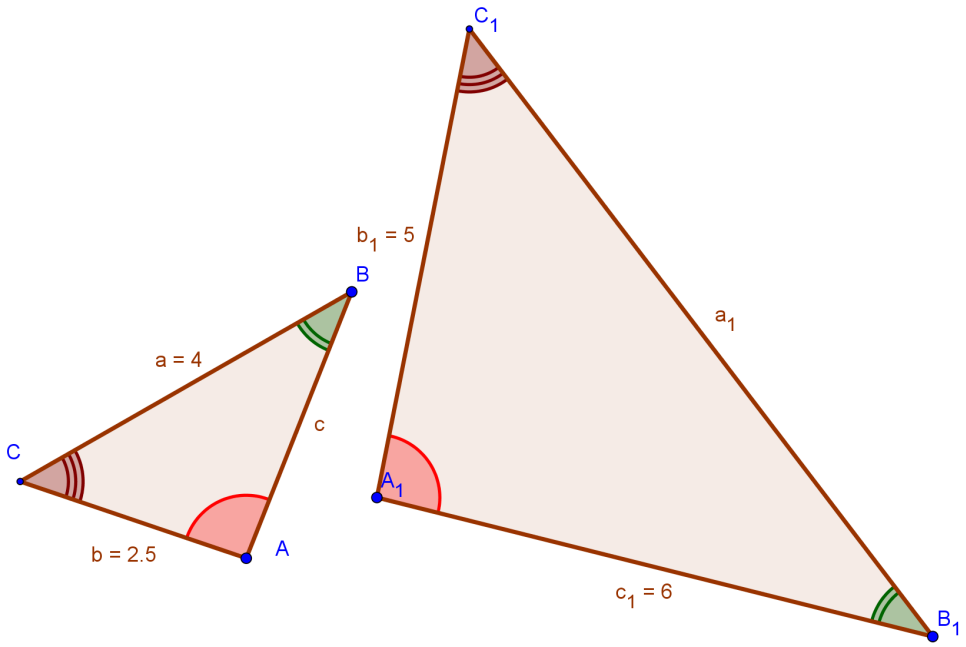
- Euklid beskriver forholdet i Bog VI, sætning 4 som:

  $\frac{b}{c}=\frac{b_1}{c_1}$
- $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$

  $\frac{c}{a}=\frac{c_1}{a_1}$
- Vis, at ligningerne her kan omkrives til ligningerne på forrige side og omvendt.

Den typiske opgave

Øvelse 2



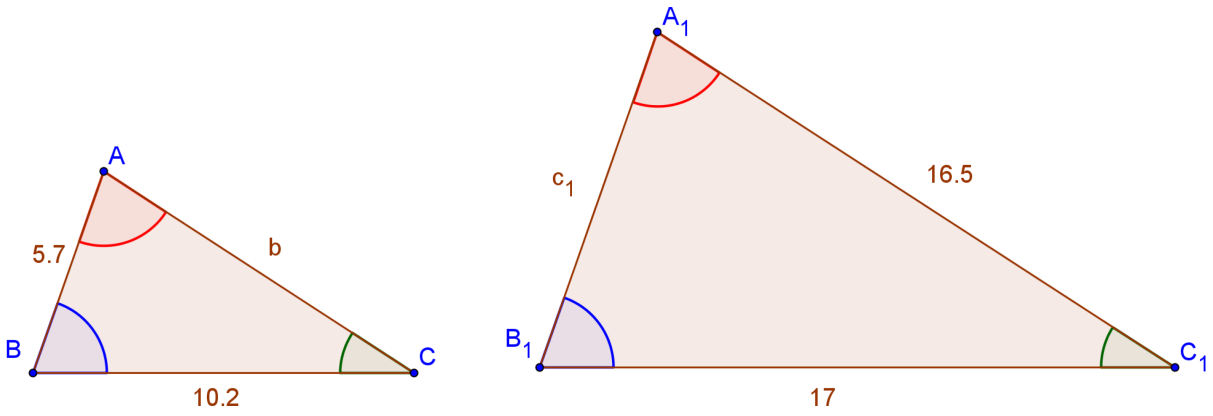
- Givet: Trekanterne er ensvinklede.
- Derfor findes der et fast korhold k mellem tilsvarende sider i de to trekanter.
- Beregn forholdet k og forklar, hvilke sidelængder der skal bruges til beregningen.
- Beregn længden af siden a_1 og forklar, hvilke tal der skal bruges til beregningen.
- Beregn længden af siden c og forklar, hvilke tal der skal bruges til beregningen.

Eksamensopgave med besvarelse

August 2009, opgave 1 (HF Matematik C)

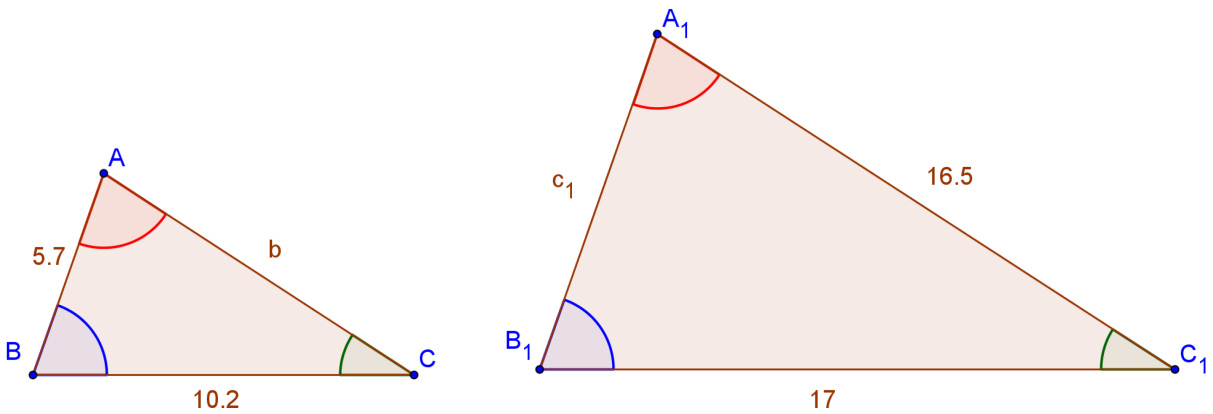
Figuren viser to ensvinklede trekanter ABC og $A_1B_1C_1$. Nogle af målene fremgår af figuren.

a) Bestem længden af hver af siderne A_1B_1 og AC.



Kommentar: Det skrives ikke direkte hvilke vinkler der er lige store, men både ved navngivning og farvelægning af buer vises det indirekte.

Besvarelsen



Da trekanterne er ensvinklede, er de også ligedannede. Der findes derfor en fælles forstørrelsesfaktor k, som gælder for alle par af sider, der svarer til hinanden.

1. Beregning af k

Siderne BC og B_1C_1 svarer til hinanden, da de ligger over for lige store vinkler.

Længderne betegnes $|BC| = a$ og $|B_1C_1| = a_1$. Derfor gælder for forstørrelsesfaktoren k:

$k = \frac{a_1}{a}$ og ved indsættelse af de oplyste tal:

$k = \frac{17}{10{,}2}$

2. Beregn længden af A_1B_1

Siderne AB og A_1B_1 svarer til hinanden, da de ligger over for lige store vinkler. Idet de tilsvarende længder betegnes hhv. c og c_1 fås:

$c_1 = k \cdot c$

og ved indsættelse af de kendte tal: $c_1 = \frac{17}{10{,}2} \cdot 5{,}7 = 9{,}50$

$|A_1 B_1| = 9{,}5$

3. Beregn længden af AC

Siderne AC og $A_{1C}C_1$ svarer til hinanden, da de ligger over for lige store vinkler. Idet de tilsvarende længder betegnes hhv. b og b_1 fås (idet der nu skal findes en side i den lille trekant) :

$b = \frac{b_1}{k}$

og ved indsættelse af de kendte tal: $b = 16{,}5 : \frac{17}{10{,}2} = \frac{16{,}5 \cdot 10{,}2}{17} = 9{,}90$

$|AC| = 9{,}9$

Kommentarer

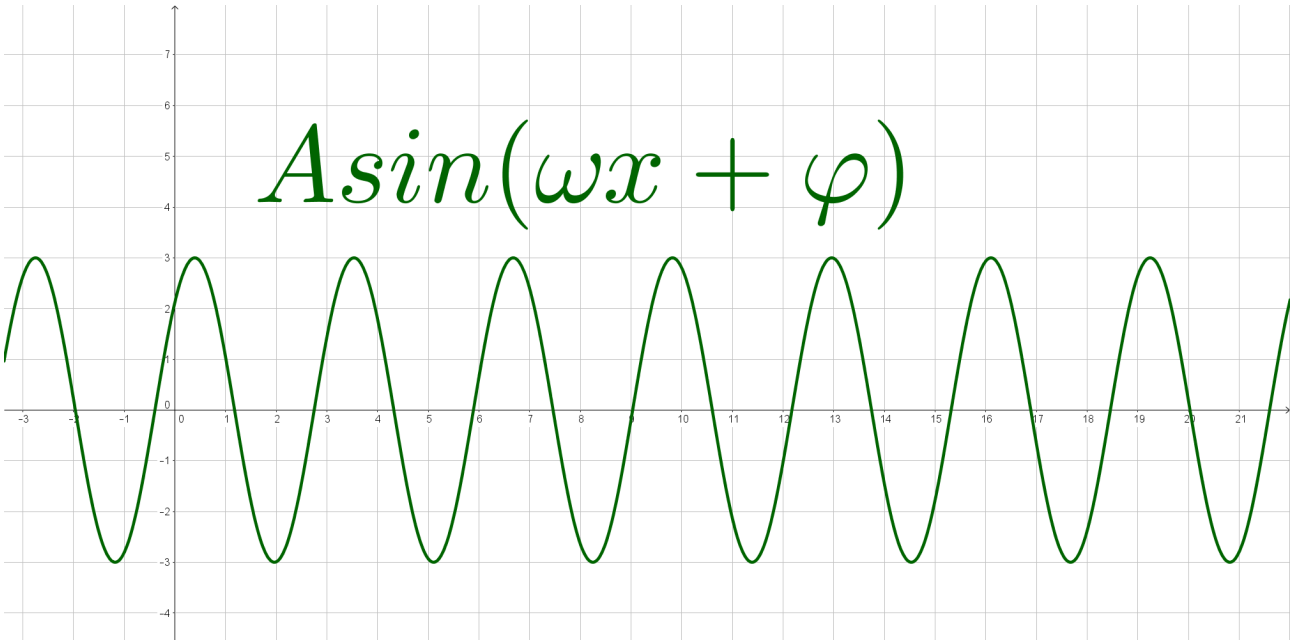
Bemærk den obligatoriske tegning, som hører med i enhver geometriopgave. Bemærk også den klare struktur, der opnås med minioverskrifter afsluttende med den fremhævede konklusion.

Undersøg, om besvarelsen iøvrigt lever op til de almindelig krav til besvarelser af eksamensopgaver. (Jævnfør side 2 i eksamensopgaverne og siderne 6-8 i http://uvmat.dk/skrift/SkriftlighedHFC/matCHFSkriftlighed.pdf.)

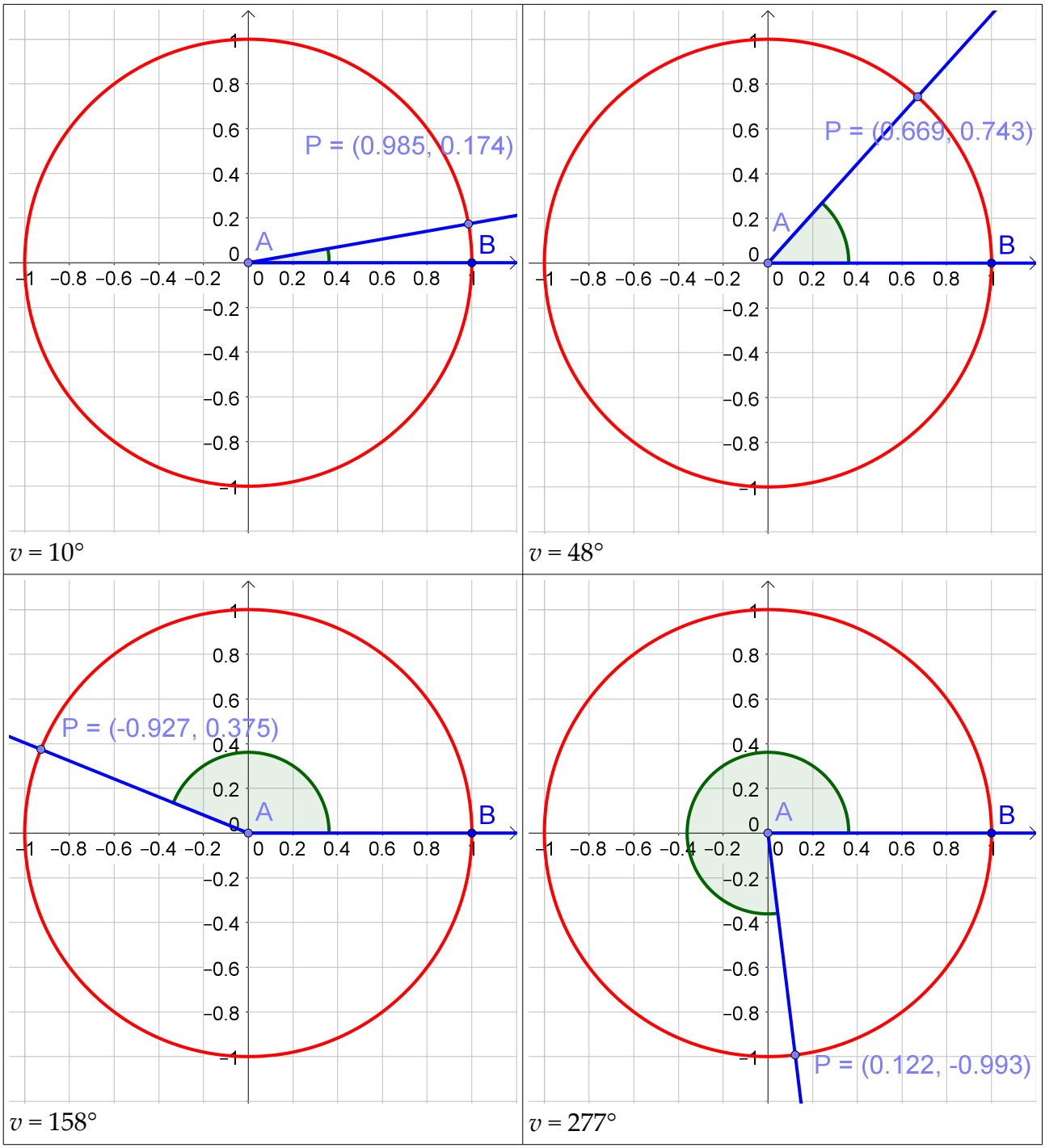
Øvelse 3

1. Øv dig i at finde størrelsesforhold og sidelængder på https://www.geogebra.org/m/GchR7UVZ

Sinusfunktionen



Om vinkler



Som det ses på de 4 figurer herover er der på hver tegnet en (rød) *enhedscirkel*: $A = (0,0)$ er centrum, radius = 1. På hver er der også tegnet en vinkel med vinkelspidsen A og højre ben gennem B i x-aksens positive retning. Venstre ben går gennem et vilkårligt punkt P på enhedscirklen (kaldet *retningspunktet*). Hvis P og B er sammenfaldende, kan vinklens

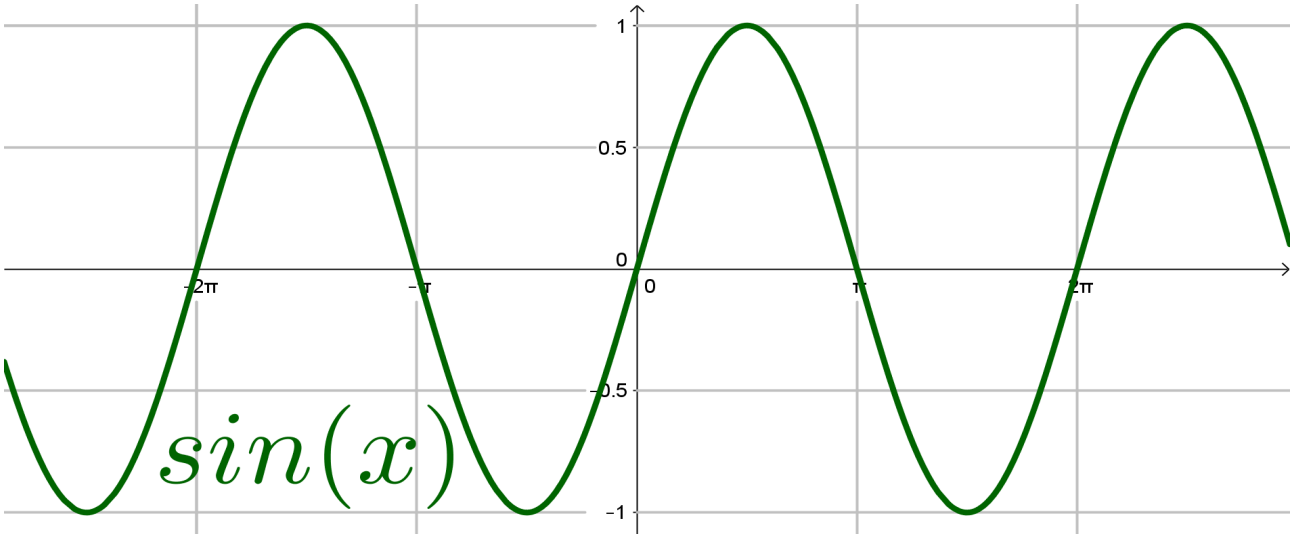
størrelse angives som 0°. Hvis *P* bevæger sig på enhedscirklern mod uret vokser vinkelstørrelsen og kan som figurerne viser fx antage værdierne 10°, 48°, 158° og 277°. Når *P* har bevæget sig hele cirklen rundt og igen er sammenfaldende med *B*, kan vinklen angives som 360°. Fortsættes drejningen ses, at retningspunktet vil være det samme sted for fx 10°, 370°, 730°, 1090° og 10° + *n* 360° (hvor *n* er et helt tal.) Bemærk, at *P* også kan drejes med uret: i så fald regnes vinklen som en negativ størrelse. Retningspunktet for 10° er altså det samme som retningspunktet for -350°. Det betyder altså, at det omtalte *n* kan være positivt, 0 eller negativt.

I stedet for at bruge gradmålet som ovenfor, kan man bruge *radianer*. En vinkels størrelse målt i radianer er lig med længden af den tilsvarende cirkelbue på enhedscirklen. En vinkel på 360° er altså det samme som en vinkel på 2π. Også med dette mål vil vi som ovenfor regne med negative vinkler og vinkler større end 2π. Retningspunkterne for alle vinklerne $x + 2\,n\,\pi$ (hvor *n* er et helt tal) er altså sammenfaldende. Bemærk, at ethvert reelt tal er et radianmål for en eller anden vinkel!

Definition af sinusfunktionen

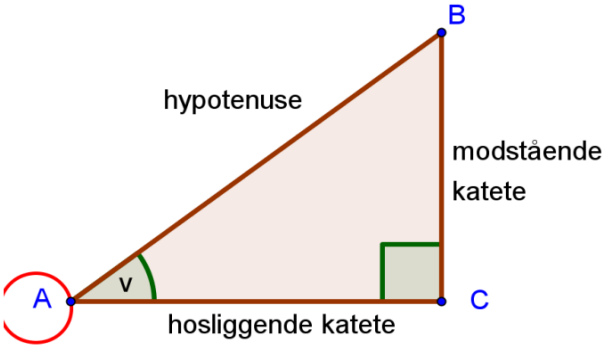
sin er en funktion fra R (de reelle tal) til [-1 , +1], hvor sin(*x*) er y-værdien i retningspunktet for vinklen med radianmålet *x*.

Herunder ses noget af grafen for denne funktion:



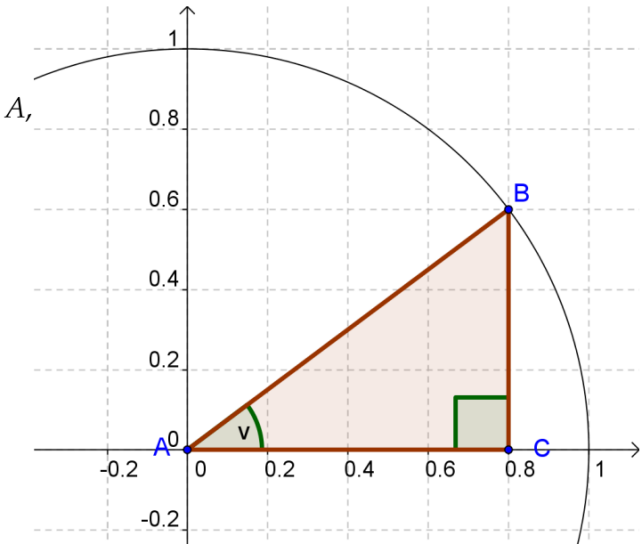
Standardtrekanter

I en retvinklet trekant har siderne navne: *hypotenuse* og *kateter*. Hypotenusen er siden overfor den rette vinkel; kateterne er de to andre (kortere) sider. Hvis én af de spidse vinkler er markeret eller valgt, kan kateterne betegnes i forhold til denne. Her er den



spidse vinkel A valgt; derfor er BC den *modstående katete* og AC den *hosliggende katete*.

I et retvinklet koordinatsystem tegnes en cirkel med radius 1 og centrum i origo: A= (0,0). Vi vælger et tilfældigt punkt på cirkelperiferien i 1. kvadrant: B. Gennem B tegnes en linje parallel med 2. aksen; denne linje skærer 1. aksen i C. [1]

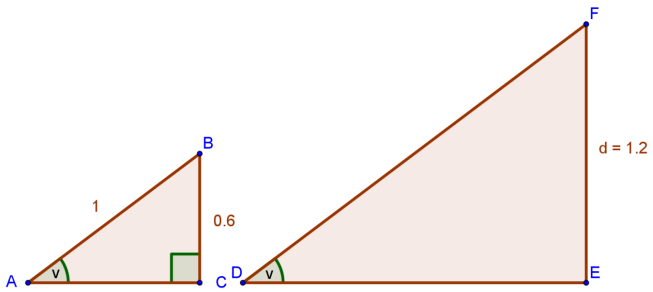


ΔABC er en retvinklet trekant og hypotenusen har længden 1. Dette er et eksempel på en standardtrekant.

Hver gang vi har en tilfældig retvinklet trekant med en spids vinkel lige så stor som A, vil denne trekant være ensvinklet med den givne standardtrekant. (Overvej det!) Det medfører, at den givne trekant er en forstørrelse eller en formindskelse af standardtrekanten.

Eksempel

Antag, at der er givet en retvinklet trekant med en spids vinkel v og at hypotenusen har længden 2. Lad os se på en standardtrekant med samme spidse vinkel v. Da trekanterne er ensvinklede, er den ene en forstørrelse af den anden. Forstørrelsesforholdet er k = 2/1 = 2. På tegningen ses, at $|BC|$ = 0,6.



Siden, der svarer til BC i den store trekant, har en længde $d = |EF|$, hvor d =2·0,6=1,2.

Begrundelsen for at anvende standardtrekanter og sinustabeller

Øvelse 4

- Tegn en standardtrekant i enhedscirklen med A i origo, AC på x-aksen og med B som retningspunkt. Forklar hvorfor $|BC|$ = sin(v).

Man kan ved hjælp af oplysningerne om størrelserne i én standardtrekant beregne alle størrelser i alle retvinklede trekanter med samme spidse vinkel som standardtrekantens.

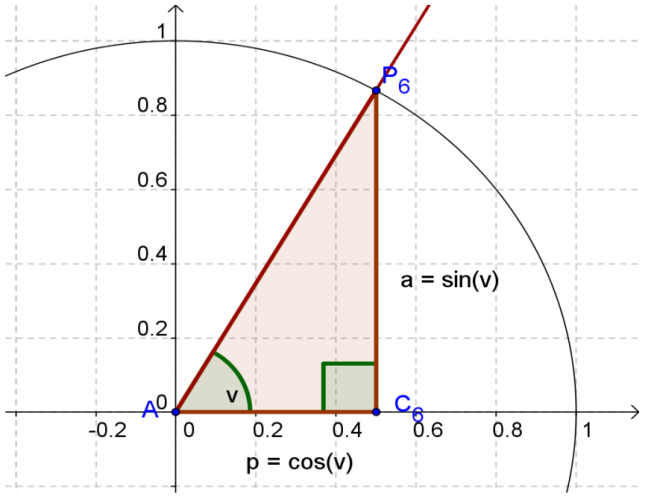
1 Om radius er 1 dm eller 5 cm eller 1 fod er underordnet; når størrelsen af radius er fastlagt, skal alle længder blot måles med denne enhed.

Da man har kendskab til størrelserne af de modstående kateter i standardtrekanter med alle mulige spidse vinkler (mellem 0° og 90°), kan man så beregne de tilsvarende størrelser i alle mulige retvinklede trekanter. Hvorledes størrelserne i standardtrekanterne evt. kan findes ved en enkel aflæsning på tegningen, kan ses herunder:

$v = 60°$

a = sin(60°) = 0,87

(ved aflæsning)



Øvelse 5

- På et A4-ark tegnes et koordinatsystem og en enhedscirkel med centrum i origo (A) og radius 1 - som vist overfor. (Koordinatsystemet er et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, hvor enheden på akserne har samme længde: fx 10 cm.)
- I 1. kvadrant tegnes nu halvlinjer fra A, som danner vinklerne 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70° og 80° med 1. aksen. (Benyt vinkelmåler.)
- Disse halvlinjer skærer enhedscirklen i punkter, der kaldes P_1 , P_2 osv. Gennem P_i tegnes en linje parallel med 2. aksen; denne linje skærer 1. aksen i C_i. Herover er vist en af halvlinjerne med de tilsvarende punkter P_6 og C_6 .
- Bemærk, at ΔAP_6C_6 er en standardtrekant, da den er retvinklet og hypotenusen har længden 1. (Hvorfor?)
- På tegningen kan ses ved måling / aflæsning, at $|P_6C_6| = 0{,}87$
- Tegn de tilsvarende trekanter for alle halvlinjerne.
- For hver trekant måles længden af den modstående katete (i forhold til den spidse vinkel A).
- Resultaterne skrives i tabellen herunder:

Vinkel	*10*	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*80*
Længde af modstående katete						*0,87*		

Sammenhængen mellem vinklerne og de tilsvarende katetelængder er en del af *sinusfunktionen* , hvor definitionsmængden er reduceret til intervallet] 0° , 90° [. (Regnes der med radianer svarer det til intervallet] 0 , $\pi/2$ [.) Sammenhængen mellem katetelængderne og vinklerne, hvor vinklerne er den afhængige variable, er den omvendte funktion: sin^{-1}.

Øvelse 6

- Lad der være givet en retvinklet trekant med hypotenuselængden 5 og en spids vinkel på 60°. Vi skal finde længden af den modstående katete.
  - Tegn den givne trekant og standardtrekanten ved siden af hinanden
  - Beregn forstørrelsesfaktoren
  - Marker med farve de to kateter i de to trekanter, der er modstående i forhold til vinklerne på 60°.
  - Du kender længden af en katete i den ene trekant: skriv længden på tegningen.
  - Hvorledes kan du nu finde længden af den tilsvarende katete i den anden trekant? Gør det!
  - Kunne du også have fundet længden af den umærkede katete i standardtrekanten? Hvordan?
- Lad der være givet en ny retvinklet trekant med en spids vinkel på 60° og hvor længden af den modstående katete er 6,7. Vi skal finde længden af denne trekants hypotenuse.
  - Tegn den givne trekant og standardtrekanten ved siden af hinanden
  - Beregn forstørrelsesfaktoren
  - Marker med farve de to hypotenuser i de to trekanter. Skriv længden på den kendte.
  - Beregn længden af den ukendte hypotenuse.
- Lad der være givet nok en ny retvinklet trekant med ukendte spidse vinkler. Til gengæld vides, at hypotenusen har længden 10 og den ene katete har længden 5. Vi skal finde størrelsen af den spidse vinkel overfor den kendte katete.
  - Tegn den givne trekant og standardtrekanten ved siden af hinanden
  - Beregn forstørrelsesfaktoren
  - Beregn længden af kateten i standardtrekanten, der svarer til den kendte katete.
  - Find vinklen!

Bemærkning

Som du kan se, har du kunnet løse alle opgaverne med hjælp fra din tabel på side 15. Den kan naturligvis ikke bruges altid, fordi der kun er medtaget få vinkler og fordi resultaterne ved måling / aflæsning ikke altid er nøjagtige nok. På forsiden kan du se en mere fuldstændig tabel; resultaterne der er også så nøjagtige, som det er muligt med det givne antal decimaler.

Tabellen der er en *sinustabel*: at finde funktionsværdierne ved måling, er naturligvis kun en nødløsning; der findes forskellige beregningsmetoder til at finde tabellens værdier, som vi ikke kommer ind på her. Din lommeregner kan for enhver vinkel v finde den tilsvarende funktionsværdi: sin(v), og og også omvendt: kendes t = sin(v), findes v som $v = \sin^{-1}(t)$.

Definitioner og sætninger

Definition af cosinusfunktionen

cos er en funktion fra R (de reelle tal) til [-1 , +1], hvor cos(x) er x-værdien i retningspunktet for vinklen med radianmålet x.

Øvelse 7

- Tegn en standardtrekant i enhedscirklen med A i origo, AC på x-aksen og med B som retningspunkt. Forklar hvorfor $|AC| = \cos(v)$.

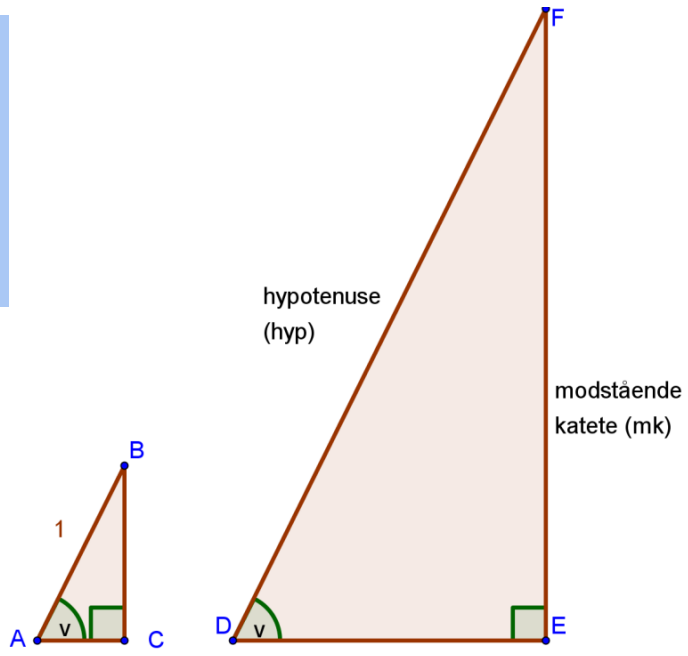
Sætning

Lad x *og* v være hhv. radianmål og gradmål for den samme vinkel. Så er: $x = v° = \frac{v}{360} \cdot 2\pi$. Sinus- og cosinus-funktionen defineret som en funktion af vinklen og funktionsværdien er uafhængig af det benyttede vinkelmål.

Sætning: mk = hyp · sin(v)

I en retvinklet trekant, hvor en spids vinkel $v°$ har størrelsen $v°$, den tilsvarende modstående katete har længden *mk* og hypotenusen har længden *hyp*, gælder

***mk* = *hyp* · sin(*v*)**



Bevis

Der er givet en tilfældig retvinklet trekant *DEF*, hvor den spidse vinkel v har størrelsen $v°$ (fx 63,69°).

Denne trekant er ensvinklet med en standardtrekant, der også har en spids vinkel af størrelse $v°$, idet den tredje vinkel bliver den samme i de to trekanter på grund af 180°-reglen.

Derfor er trekanterne ligedannede; skalafaktoren k beregnes ved hjælp af siderne overfor den rette vinkel som $k = hyp / 1 = hyp$; da siderne med længderne mk og sin(A) ligger overfor vinkler med den samme størrelse, nemlig $v°$ fås sætningen:

$mk = k \cdot \sin(A) = hyp \cdot \sin(v°)$.

Sætning: hk = hyp·cos(v)

I en retvinklet trekant, hvor en spids vinkel har størrelsen $v°$, den tilsvarende hosliggende katete har længden hk og hypotenusen har længden hyp, gælder

hk = hyp · cos(v)

Beviset for denne sætning er helt tilsvarende det forrige bevis.

Definition: tan(A)

tan(A) [læses: tangens til A], hvor A er en spids vinkel, defineres som $\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)}$ [2]

Sætning: $\tan(v) = \frac{mk}{hk}$

Når v er en spids vinkel i en retvinklet trekant, gælder $\tan(v) = \frac{mk}{hk}$

Bevis

Når v er en spids vinkel i en retvinklet trekant, gælder hhv.

$mk = hyp \cdot \sin(v)$ og $hk = hyp \cdot \cos(v)$ ifølge vore sætninger (se lige ovenover).

Heraf ses:

$\frac{mk}{hk} = \frac{hyp \cdot \sin(v)}{hyp \cdot \cos(v)} = \frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \tan(v)$ idet omskrivningerne gælder 1) på grund af sætningerne ovenover, 2) fordi hyp kan forkortes væk, 3) og endelig på grund af definitionen.

2 A behøver ikke at være en spids vinkel. Definitionen kan udvides til alle vinkler med undtagelse af de vinkler, hvor cos(x) = 0. Dvs. DM(tan) = R\{x|x=π/2+n π}, hvor n igen er et helt tal.

Retvinklede trekanter

Pythagoras sætning

For enhver retvinklet trekant gælder:
kvadratet på hypotenusen er lig med summen af kateternes kvadrater.

Bemærkninger

- Kvadratet på hypotenusen kan betyde:
  - arealet af det kvadrat, der har hypotenusen som side
  - eller arealets størrelse (dvs. et tal), der fås som længden af hypotenusen i anden
- Kaldes længderne hyp, k_1 og k_2 fås: $hyp^2 = k_1^2 + k_2^2$
- Ofte gengives sætningen (idet der som eksempel benyttes ΔABC) som $c^2 = a^2 + b^2$
- Beviset for sætningen findes i Euklids Bog I, sætning 47.

Den omvendte sætning (af Pythagoras sætning)

Når kvadratet på en af siderne i en trekant er lig summen af kvadraterne på trekantens to andre sider, er den vinkel, der indesluttes af trekantens to andre sider, ret.

Bemærkninger

- Beviset for sætningen findes i Euklids Bog I, sætning 48.

Opgaver om retvinklede trekanter

Eksempel I: kendt spids vinkel og hypotenuse

Givet en retvinklet trekant med hypotenusen 5 og en spids vinkel på 30°. Beregn de to manglende sider.

Besvarelse

(Tegn selv en skitse, påfør de oplyste mål)

Da trekanten er retvinklet, benyttes sætningen: $mk = hyp \cdot \sin(v)$

De oplyste tal indsættes:

$$mk = 5 \cdot \sin(30\,°) = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$$

$mk = 2{,}5$

Øvelse 8

- Færdiggør eksemplet, idet du først beregner den manglende vinkel og benytter samme metode og opstilling igen. (Husk altid at tegne figuren i trigonometri-opgaver.)

Eksempel II: kendt spids vinkel og modstående katete

Givet en retvinklet trekant med modstående katete på 0,8 og en spids vinkel på 30°. Beregn de to manglende sider.

Besvarelse

Først findes hypotenusen. (Tegn selv en skitse, påfør de oplyste mål)

Da trekanten er retvinklet, benyttes sætningen: $mk = hyp \cdot \sin(v)$

De oplyste tal indsættes:

$$0{,}8 = hyp \cdot \sin(30°) \Leftrightarrow \frac{0{,}8}{\sin(30°)} = hyp \Leftrightarrow \frac{0{,}8}{0{,}5} = hyp \Leftrightarrow 1{,}6 = hyp$$

$hyp = 1{,}6$

Øvelse 9

- Den manglende katete kan beregnes som i forrige øvelse. Gør det. (Husk altid at tegne figuren i trigonometriopgaver.)

Eksempel III: kendt katete og hypotenuse

Givet en retvinklet trekant, hvor hypotenusen har længden 20 og den modstående katete har længden 3, skal den spidse vinkel findes.

Besvarelse

(Tegn selv en skitse, påfør de oplyste mål)
Da trekanten er retvinklet, benyttes sætningen:

$$mk = hyp \cdot \sin(v)$$

De oplyste tal indsættes:

$$3 = 20 \cdot \sin(v) \Leftrightarrow$$
$$\frac{3}{20} = \frac{20 \cdot \sin(v)}{20} \Leftrightarrow$$
$$\frac{3}{20} = \sin(v) \Leftrightarrow$$
$$\sin^{-1}\left(\frac{3}{20}\right) = \sin^{-1}(sin(v)) \Leftrightarrow$$
$$8{,}62° = v \Leftrightarrow$$
$$v = 8{,}62°$$

$v = 8{,}6°$ [3]

Bemærkning

sin er en voksende funktion af vinkelstørrelsen for de spidse vinkler i den retvinklede trekant. Derfor er der kun en løsning til ligningen, vi netop løste.

Hvis du ser på tabellen, der indleder hæftet, er der to kolonner: en for vinkler og en for sinus-værdier. Tabellen kan læses begge veje: Kender du vinklen, starter du i 1. kolonne, kender du sinus-værdien, starter du i 2. kolonne og går tilbage til 1. kolonne. At gå tilbage (til vinklen) i sinustabellen skrives: $\sin^{-1}$.

Antag, at du ved $\sin(v) = 0{,}6561$. Du skal finde den hertil svarende vinkel.

Løsning

I tabellen findes i sinuskolonnen tallet 0,6561 – eller det tal, der kommer nærmest. Ud for det står vinklen 41°. Det er den søgte vinkel. Eller mere præcist: Størrelsen af den søgte vinkel. Løsningen beskrives således:

$\sin(v) = 0{,}6561 \Leftrightarrow \quad v = \sin^{-1}(0{,}6561) \Leftrightarrow$

$v = 41°$

Alternativ løsning

Tabeller er ikke den bedste metode til at løse opgaven. Indtil for knap 30-40 år siden var det metoden, men i dag benyttes lommeregnere.

På lommeregneren indtastes en sekvens som

[2nd] [sin] (0,6561) [enter]

eller 0,6561 [inv] [sin]

eller noget tredje.

Læs manualen til lommeregneren.!

3 Bemærk, at det er hensigtsmæssigt at undlade at regne med afrundede decimalbrøker og at udskyde anvendelsen af lommeregneren indtil det endelige resultat kan udregnes ved én tastesekvens.

Eksempel IV: kendte kateter

Givet en retvinklet trekant, hvor den modstående katete har længden 3 og den hosliggende har længden 5, beregnes de to spidse vinkler.

Besvarelse

(Tegn selv en skitse, påfør de oplyste mål)

Da trekanten er retvinklet, benyttes sætningen: $\tan(v)=\frac{mk}{hk}$

De oplyste tal indsættes:

$$\tan(v)=\frac{3}{5}\Leftrightarrow$$

$$\tan^{-1}(\tan(v))=\tan^{-1}(\frac{3}{5})\Leftrightarrow$$

$$v=30{,}96°\Leftrightarrow$$

$$v=31{,}0°$$

$v = 31{,}0°$

Den sidste vinkel findes nemt med 180-graders reglen.

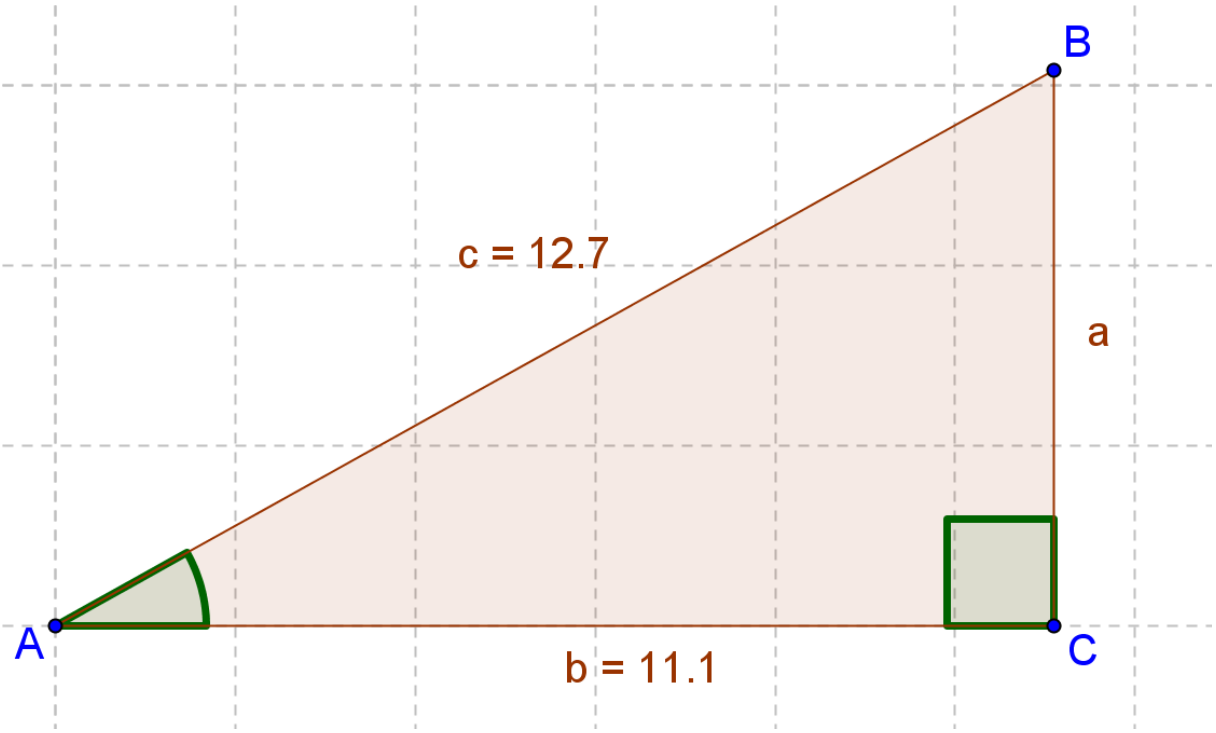
Øvelser for én eller et par

Øvelse 10

- Løs trekantsopgaver som de ovenstående. Følg linket: https://www.geogebra.org/m/GchR7UVZ

Eksamensopgave med besvarelse

December 2010, opgave 1 (HF Matematik C)



Figuren viser en retvinklet trekant *ABC*. Nogle af trekantens mål fremgår af figuren.

a) Bestem vinkel *A*.

Besvarelsen

Da trekanten er retvinklet, gælder det, at $hk = hyp \cdot \cos(v)$

Ved benyttelse af tegningens betegnelser fås $b = c \cdot \cos(A)$

og ved indsættelse af af de oplyste tal:

$$11{,}1 = 12{,}7 \cdot \cos(A) \Leftrightarrow$$

$$\frac{11{,}1}{12{,}7} = \frac{12{,}7 \cdot \cos(A)}{12{,}7} \Leftrightarrow$$

$$\frac{11{,}1}{12{,}7} = \cos(A) \Leftrightarrow$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{11{,}1}{12{,}7}\right) = \cos^{-1}(\cos(A)) \Leftrightarrow$$

$$29{,}07^\circ = A \Leftrightarrow$$

$\angle A = 29{,}1°$

Model

Ofte møder du en opgave med et eksempel fra "det virkelige liv". Den kunne være formuleret således:

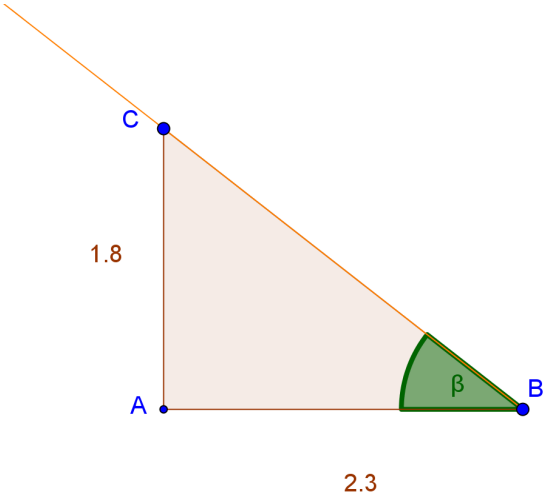
"Bestem solhøjden (dvs. vinklen mellem vandret plan og en sigtelinje til solen) når Peter, der måler 1,80 m kaster en 2,30 m lang skygge på jorden."

Besvarelse

Vi formulerer en **matematisk model** ved at indføre nogle forenklende antagelser:

Peter kan beskrives ved et lodret linjestykke med længden 1,80, hans skygge ved et vandret linjestykke med længden 2,30.

De to linjestykker er benene i en ret vinkel med spids "under Peters fødder." Modellen er så sammenhængen mellem virkeligheden ogden matematiske beskrivelse. Her er den sidste så en geometrisk figur, som ses på tegninen herunder.



Opgaven er at finde vinklen β.

Da de to kateter kendes i den retvinklede trekant, benyttes sætningen

$$\tan(v)=\frac{mk}{hk}$$

Heri indsættes de kendte størrelser:

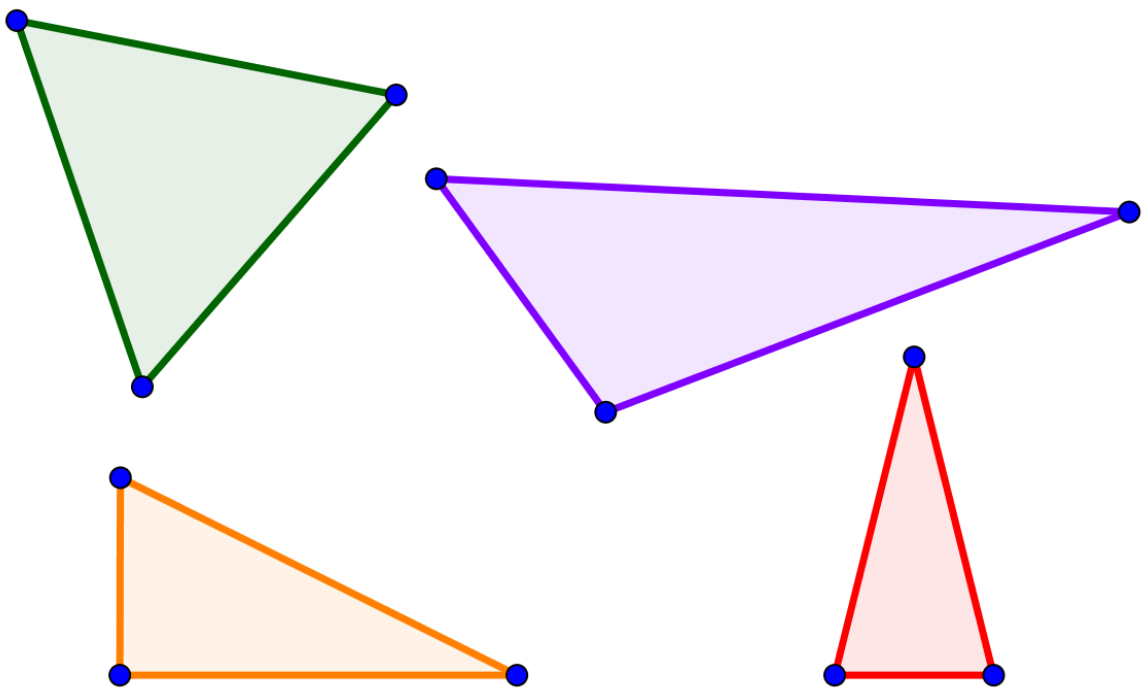
$$\tan(\beta)=\frac{1,80}{2,30}\Leftrightarrow$$

$$\tan^{-1}(\tan(\beta))=\tan^{-1}\left(\frac{1,80}{2,30}\right)\Leftrightarrow$$

$$\beta=38,04^{o}$$

Dvs. at solhøjden (β) er 38,0°

Skævvinklede trekanter



Sinusrelationerne

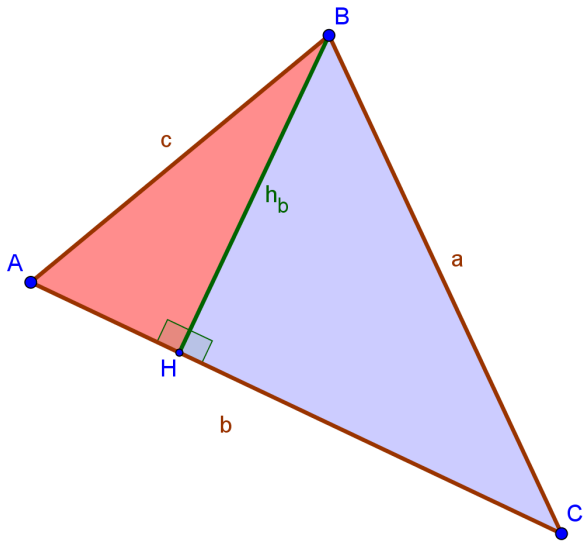
Sætning om sinusrelationerne

Lad der være givet en vilkårlig trekant ABC. Så gælder: $\frac{a}{\sin(A)}=\frac{b}{\sin(B)}=\frac{c}{\sin(C)}$

Bevis

Idéen i beviset er: at beregne en højde to gange og dermed kunne opstille en ligning, der kan omskrives til (en del af) sinusrelationerne.

Beregningerne er en smule forskellige afhængig af, om fodpunktet for højden fra B ligger mellem A og C eller ej. I første omgang forudsættes det, at vinklerne A og C er spidse; de andre tilfælde behandles som tilføjelser.



Højden h (eller mere præcist: h_b) fra B til b tegnes. Kald højdens fodpunkt H. Dermed er der dannet to retvinklede trekanter: ***ABH* (rød)** og ***CBH* (blå)**.

Sætningen $mk=hyp\cdot\sin(v)$ gælder i begge de to retvinklede trekanter, da de er retvinklede. I begge er h den modstående katete til hhv. vinkel A og vinkel C

Ved indsætning af trekantens betegnelser ses:

$$h=c\cdot\sin(A)$$
$$h=a\cdot\sin(C)$$

Da h er den samme i de to ligninger, fås:

$$a\cdot\sin(C)=c\cdot\sin(A)\Leftrightarrow$$
$$\frac{a\cdot\sin(C)}{\sin(A)\cdot\sin(C)}=\frac{c\cdot\sin(A)}{\sin(A)\cdot\sin(C)}\Leftrightarrow$$
$$\frac{a}{\sin(A)}=\frac{c}{\sin(C)}$$

I ligningen er det tilladt at dividere med sin(A) og sin(C), da ingen af dem kan være nul i en egentlig trekant. At der kan forkortes som vist, er trivielt.

Dermed er sinusrelationerne delvist bevist (i dette tilfælde). For at vise, at den sidste brøk

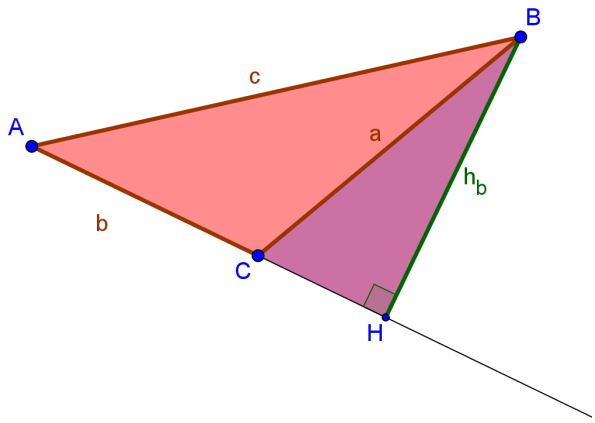
er lige så stor som de to andre, deles trekanten af én af de andre højder, fx den fra C. Så kan det på tilsvarende vis bevises, at

$$\frac{a}{\sin(A)}=\frac{b}{\sin(B)}$$

Sammenholdes de to ligninger, ses at alle tre brøker er lige store – og dermed er sinusrelationerne bevist i dette tilfælde.

Men hvis trekantens ene vinkel er stump, falder højdens fodpunkt ikke på linjestykket b. Vi har dog som før: $h=c\cdot\sin(A)$, men i trekant BCH (nu violet) er den spidse vinkel ikke C, men supplementvinklen. Derfor fås:

$h=a\cdot\sin(180^o-C)$



Da der altid gælder, at

$\sin(v)=\sin(180^o-v)$, fås:

$h=a\cdot\sin(C)$

og beviset fortsætter som før.

Den tredje og sidste mulighed er, at én af vinklerne er ret, fx vinkel C. Men i så fald gælder også, at $h=a=a\cdot 1=a\cdot\sin(90^o)=a\cdot\sin(C)$, hvorefter resten af beviset igen kan gentages!

2. arealsætning

Arealet T af en trekant er det halve produkt af to sidelængder og sinus til den mellemliggende vinkel. (Fx $T=0{,}5\cdot b\cdot c\cdot\sin(A)$)

Bevis

Da trekantens areal kan beregnes som

$$T=\frac{h\cdot g}{2}$$

fås ved indsætning af $g=b$ og $h=c\sin(A)$:

$$T=\frac{c\cdot\sin(A)\cdot b}{2}$$ eller

$$T=\frac{b\cdot c\cdot\sin(A)}{2}$$

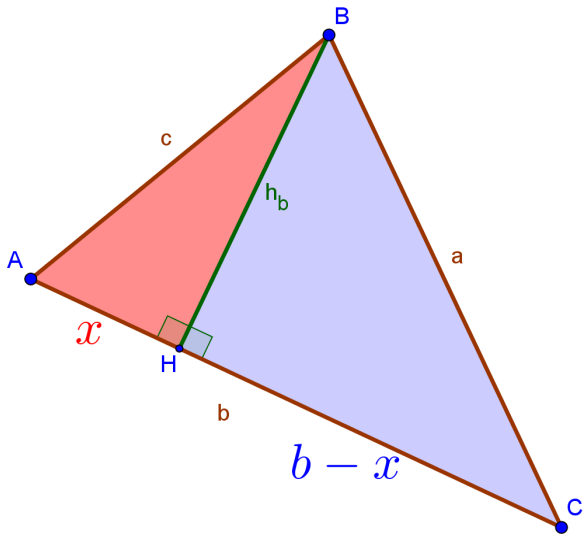
Cosinusrelationerne

Lad der være givet en vilkårlig trekant ABC. Så gælder: $a^2=b^2+c^2-2b\cdot c\cdot\cos(A)$ og $\cos(A)=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b\cdot c}$ samt tilsvarende formler for de øvrige størrelser. [4]

Bevis

Idéen i beviset er: at beregne kvadratet på højden to gange og dermed kunne opstille en ligning, der kan omskrives til cosinusrelationerne.

Beregningerne er en smule forskellige afhængig af, om fodpunktet for højden fra B ligger mellem A og C eller ej. I første omgang forudsættes det, at vinklerne A og C er spidse; de andre tilfælde behandles som tilføjelser.



Højden h (eller mere præcist: h_b) fra B til b tegnes. Kald højdens fodpunkt H. Dermed er der dannet to retvinklede trekanter: ***ABH* (rød)** og ***CBH* (blå)**.

Lad x = $|AH|$ hvoraf følger: b-x = $|HC|$. Pytagoras sætning ($k_1^2+k_2^2=hyp^2$) gælder i begge trekanterne (da de er retvinklede) og ved indsætning af trekanternes betegnelser fås hhv.:

I trekant ***ABH***: $h^2+x^2=c^2\Leftrightarrow h^2=c^2-x^2$

I trekant ***CBH***: $h^2+(b-x)^2=a^2\Leftrightarrow h^2=a^2-(b-x)^2$

Da h er ens i begge trekanter, bliver ligningernes højresider ens:

$$\begin{aligned}
a^2-(b-x)^2&=c^2-x^2\Leftrightarrow\\
a^2&=c^2-x^2+(b-x)^2\Leftrightarrow\\
a^2&=c^2-x^2+b^2+x^2-2bx\Leftrightarrow\\
a^2&=c^2+b^2-2bx\Leftrightarrow\\
a^2&=c^2+b^2-2bc\cos(A)
\end{aligned}$$

Omskrivningerne fås ved: 1) at addere $(b-x)^2$ på begge sider af lighedstegnet, 2) at benytte 2. kvadratsætning, 3) reduktion og 4) anvendelse af $hk=hyp\cdot\cos(v)$ i trekant ***ABH***.

4 Bemærk, at det i alle varianter af formlen gælder, at der er tale om to sider og den mellemliggende vinkel for at beregne den tredje side.

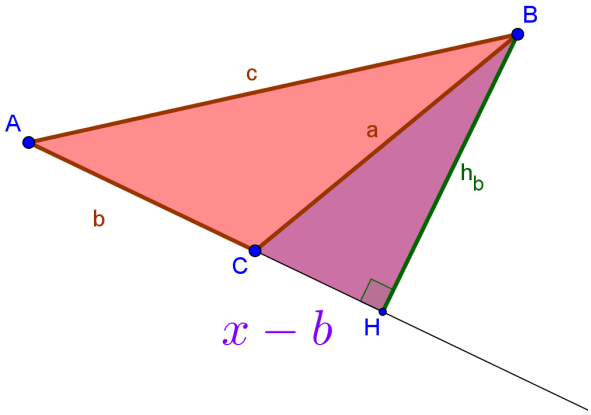
Hermed er første del bevist. 2. del fås ved at isolere cos(A) i ligningen. Dette overlades til læseren.

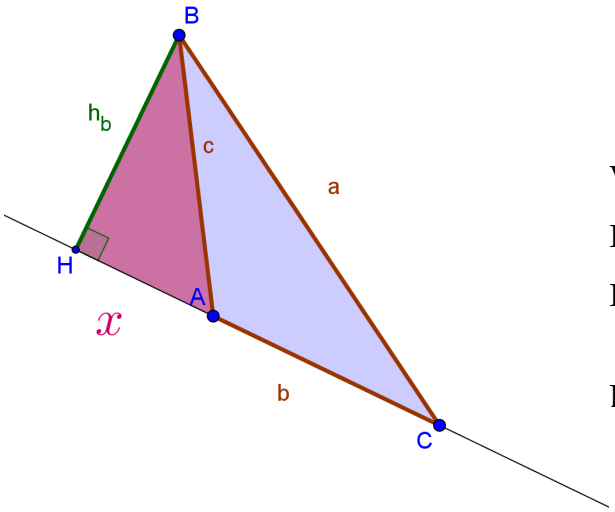
I tilfældet, hvor vinkel C er stump, kaldes $|AH|$ igen x, men nu er $|HC| = x\text{-}b$.

Det ses, at vi får de samme ligninger som før ved beregning af h^2, fordi $(x-b)^2=(b-x)^2$

Derfor gælder cosinusrelationerne også i dette tilfælde.

I tilfældet, hvor vinkel A er stump (som det ses herunder), kaldes $|AH|$ igen x, men nu er $|HC| = x+b$.





Ved anvendelse af Pythagoras sætning fås:

I trekant ***ABH***: $h^2+x^2=c^2 \Leftrightarrow h^2=c^2-x^2$

I trekant ***CBH***:
$h^2+(b+x)^2=a^2 \Leftrightarrow h^2=a^2-(b+x)^2$

Ligningen bliver derfor:

$$a^2-(b+x)^2=c^2-x^2 \Leftrightarrow$$
$$a^2=b^2+c^2+2bx \Leftrightarrow$$
$$a^2=b^2+c^2+2bc\cos(180^o-A) \Leftrightarrow$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(A)$$

Som før er der adderet, brugt kvadratsætning og reduceret. Videre benyttes, at den spidse vinkel i trekant ABH er supplementvinklen til A. Endelig benyttes, at cos til en vinkel og cos til dennes supplementvinkel har modsat fortegn.

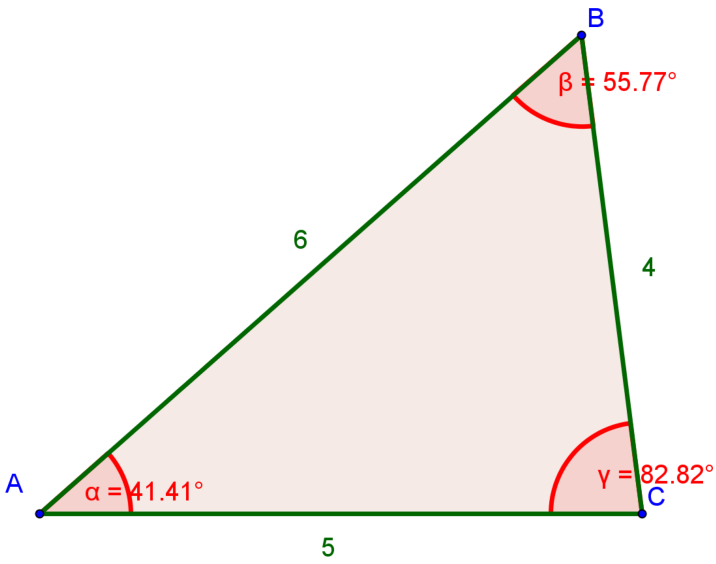
Resultatet er, at i alle de viste tilfælde gælder den samme formel. Det overlades til læseren at vise, at det også gælder når vinkel A eller C er en ret vinkel.

Opgaver om skævvinklede trekanter

For at finde de manglende størrelser i en trekant, skal man have 3 størrelser oplyst som for eksempel 2 vinkler og én side. Den eneste kombination, der ikke er tilstrækkelig, er 3 vinkler. Selvom man kan tegne figuren, kan man ikke give den én bestemt (rigtig) størrelse. I virkeligheden var den 3. vinkel heller ikke en ny, tredje oplysning; den kan jo beregnes med 180°-reglen.

Eksempel I: SSS (tre sider kendte)

I trekanten *ABC* er de tre sidelængder 4, 5 og 6 kendte. Opgaven er at beregne vinklerne.



Besvarelse

Cosinusrelationerne gælder i alle trekanter; da vi vil finde en vinkel, benyttes formlen

$$\cos(C)=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$ [5]

De kendte tal indsættes:

$$\cos(C)=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 5}\Leftrightarrow$$

$$\cos(C)=\frac{16+25-36}{40}\Leftrightarrow$$

$$\cos(C)=\frac{5}{40}\Leftrightarrow$$

$$\cos(C)=\frac{1}{8}\Leftrightarrow$$

$$\angle C=\sin^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\Leftrightarrow$$

$$\angle C=82{,}8\,°$$

Øvelse 11

- Find de to sidste vinkler på samme måde. Sammenlign med tegningens oplysninger.

Eksempel II: SVS (to sider kendte samt den mellemliggende vinkel)

I trekanten er de to sidelængder 5 og 6 kendte samt størrelsen på den mellemliggende vinkel: 55°. Opgaven er i første omgang at beregne *a*.

5 Når du skal huske formlen, kan du bemærke at siden c svarer til vinklen C, og at den har en særstatus: modsat fortegn i tæller og ikke med i nævner.

Besvarelse

Cosinusrelationerne gælder i alle trekanter; da vi vil finde a benyttes formlen $c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos(C)$ som omskrives, fordi den kendte vinkel er A og den side, der skal beregnes, er a:

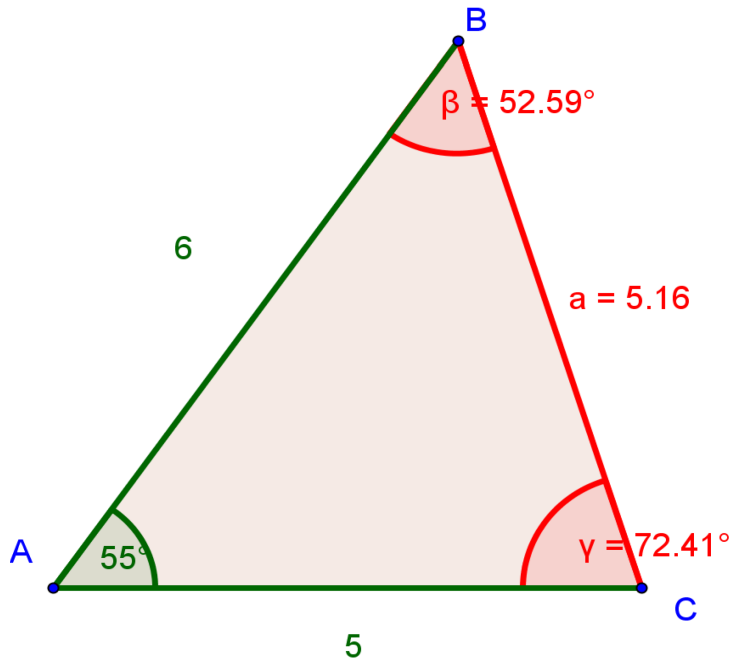
$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos(A)$$

De kendte tal indsættes:

$$a^2=5^2+6^2-2\cdot 5\cdot 6\cdot\cos(55\,°)\Leftrightarrow$$
$$a^2=25+36-60\cdot\cos(55\,°)\Leftrightarrow$$
$$a^2=61-60\cdot\cos(55\,°)\Leftrightarrow$$
$$a=\sqrt{(61-60\cdot\cos(55\,°))}\Leftrightarrow$$

$$a=5{,}2$$

(Bemærk, at ligningens negative løsning – 5,2 kan der ses bort fra, da a er en længde.)



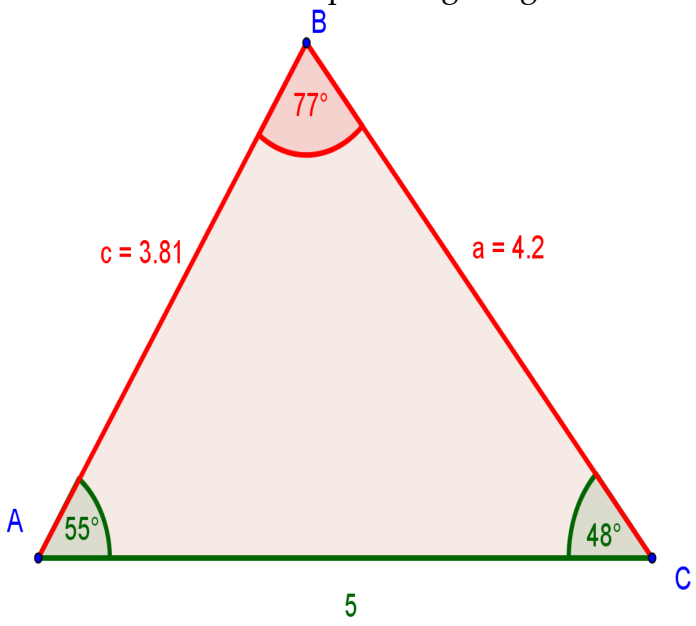
Øvelse 12

- Beregn de manglende vinkler (Obs.: tegningen er facitliste!)
- Beregn vinkelsummen

Eksempel III: VSV (to vinkler kendte samt den mellemliggende side)

I trekanten er sidelængden 5 kendt sammen med vinklerne på 55° og 48° grader.

Opgaven er at beregne den sidste vinkel og de manglende sider.



Besvarelse

180-graders reglen gælder i alle trekanter: Derfor fås:

$$\angle B=180\,°-\angle A-\angle C$$

De kendte tal indsættes:

$$\angle B=180\,°-55\,°-48\,°\Leftrightarrow$$

$$\angle B=77\,°$$

Sinusrelationerne gælder i alle trekanter; da vi vil finde a benyttes formlen

$$\frac{a}{\sin(A)}=\frac{b}{\sin(B)}$$

De kendte tal indsættes:

$$\frac{a}{\sin(55°)}=\frac{5}{\sin(77°)}\Leftrightarrow$$

$$a=\frac{5\cdot\sin(55°)}{\sin(77°)}\Leftrightarrow$$

$a=4{,}2$

Øvelse 13

- Beregn den manglende side (Obs.: tegningen er facitliste!)
- Antag, at det ikke var den mellemliggende side, der var kendt, men i stedet c = 3,81. Beregn de manglende 3 størrelser i dette tilfælde.

Eksempel IV: VSS (hvor en vinkel og en hosliggende og en modstående side er kendt)

I trekanten her er $\angle A = 55°$, $a = 4{,}3$ og $b = 5$ de kendte størrelser. Opgaven er at finde de manglende 3 størrelser i en trekant, der opfylder disse betingelser. Bemærk, at i denne opgavetype er der ingen løsning, hvis a er for kort; forsøg evt. med a = 3,9. a skal kunne nå fra C over til vinkel A's venstre vinkelben.

På tegningen er der vist 2 trekanter, som svar på opgaven: Begge opfylder de opstillede betingelser. Det er der ikke altid: Hvis a > b, hvis a = b eller hvis a lige akkurat kan nå vinkel A's venstre ben, er der præcis én løsning.

Besvarelse

Sinusrelationerne gælder i alle trekanter; da vi vil finde $\angle B$ benyttes formlen

$$\frac{\sin(A)}{a}=\frac{\sin(B)}{b}$$

De kendte tal indsættes:

$$\frac{\sin(55°)}{4{,}3}=\frac{\sin(B)}{5}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin(55°)\cdot 5}{4{,}3}=\sin(B)\Leftrightarrow$$

$\angle B = 72{,}3\,°$ ∨ $\angle B = 107{,}7\,°$

(idet du bemærker, at sin(v) = sin(180° -v). For hver af disse vinkler kan findes løsninger for vinklen C og siden c.

Øvelse 14

- Beregn vinklerne C_1 og C_2 og de tilsvarende sider. (Obs.: tegningen er facitliste!)

Øvelse 15

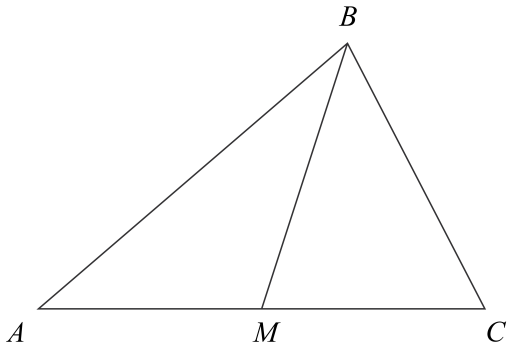
Øvelser

- Løs trekantsopgaver som de ovenstående. Følg linket: https://www.geogebra.org/m/z3fcjeH3

Eksamensopgave med besvarelse

22. maj 2015, opgave 11 (Matematik A , stx)

I en trekant ABC er $|AB| = 13$. Midtpunktet af siden AC benævnes M, og det oplyses, at $|AM| = 7$ og $|BM| = 9$.

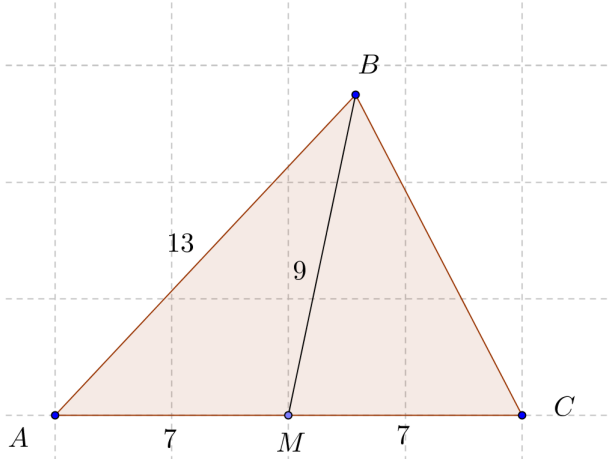


a) Bestem vinkel A, og bestem omkredsen af trekant ABC.

b) Bestem længden af højden fra B.

Besvarelse

Nogle af målene i trekant ABC er oplyst og påført nedenstående skitse, hvor M er midtpunktet af siden AC.



a. Beregning af vinkel A

Vinklen beregnes med cosinusrelationerne (som gælder i enhver trekant) i trekant ABM:

$$\angle A=\cos^{-1}\left(\frac{b^2+m^2-a^2}{2\cdot b\cdot m}\right) \quad .$$

De kendte tal indsættes:

$$\angle A=\cos^{-1}\left(\frac{7^2+13^2-9^2}{2\cdot 7\cdot 13}\right)\Leftrightarrow$$

$$\angle A=41{,}2\,°$$

b. Beregning af omkredsen

Da M er midtpunkt på AC, er $|AC| = 2\,|MC| = 14$.

Med cosinusrelationerne - nu i trekant ABC - beregnes a:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos(A) \quad .$$

De kendte tal indsættes:

$$a^2=14^2+13^2-2\cdot 14\cdot 13\cdot\cos(41{,}2\,°)\Leftrightarrow$$

$$a^2=91{,}0\Leftrightarrow$$

$$a=9{,}5$$

Omkredsen $O=a+b+c$; tallene indsættes:

$$O=9{,}5+14+13=36{,}5\Leftrightarrow$$

$$O=36{,}5$$

Omkredsen = 36,5

c. Højden beregnes

Lad H være fodpunktet for højden h_b fra B. Højden er da den modstående katete i forhold til vinkel A i den retvinklede trekant ABH. Den kan beregnes med formlen: $mk = hyp\cdot\sin(v)$ (der gælder i alle retvinklede trekanter); de kendte tal indsættes:

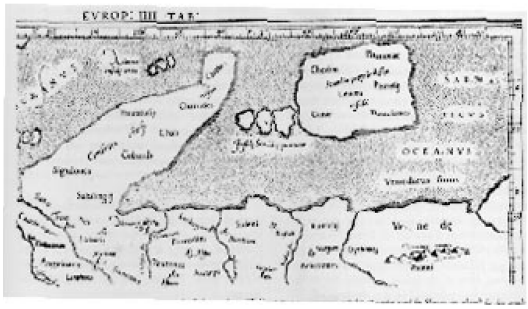
$$h_b=13\cdot\sin(41{,}2\,°)=8{,}6$$

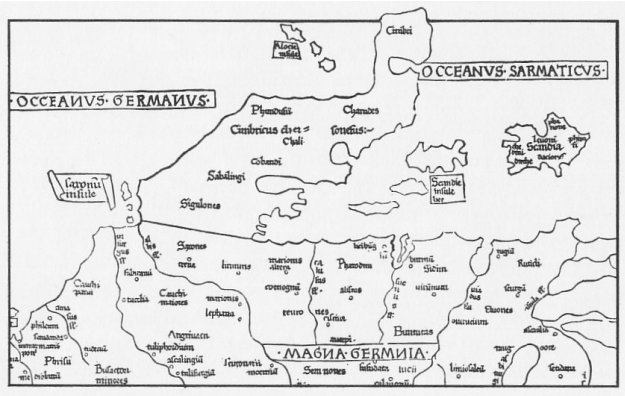
Højdens længde = 8,6

Danmarkskort

Geometri betyder "jordmåling" og resultaterne benyttes bl.a. til at tegne kort. Kort er og var vigtige. Formålet med at have dem kunne fx være at finde vej eller at fastlægge skel mellem ejendomme eller at beregne ejendommes størrelse. I Danmark skyldes de ældste kort optegnelser gjort af Ptolemæus fra Alexandria ca. 200 EVT.

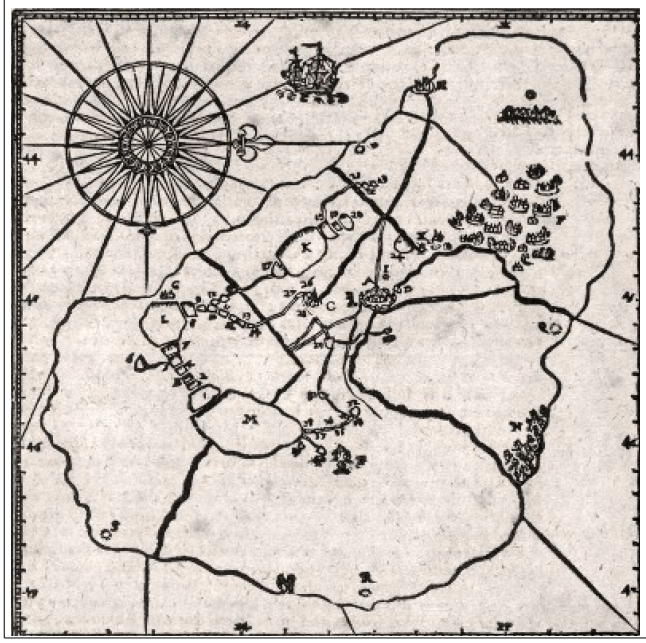
Selve kortene er dog tegnet væsentligt senere. Begge er baseret på blot 13 målepunkter samt beskrivende notater.





2 kort tegnet efter optegnelser fra Ptolemæus af Alexandria, 200 E.V.T. Kortet til højre trykt 1477.

Et lidt senere (og nøjagtigere) kort er dette over Hven fra Tycho Brahes tid , som du kan sammenligne med et moderne turistkort. Opmålingen fandt sted omkring 1578. Forbedringen skyldes både, at der anvendes flere målepunkter og forbedringer af måleinstrumenterne.



Johannes Mejers kort

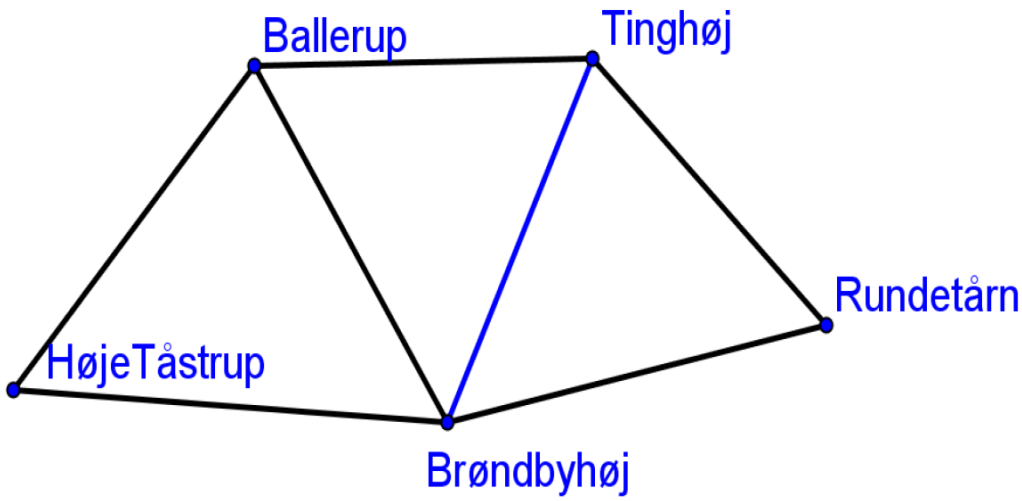
Nogle af de første første gode kort i Danmark og hertugdømmerne skyldes Johannes Mejer fra Husum. Han tegnede en lang række kort: først for hertugen på Gottorp, Friedrich 3. og senere for den danske konge, Christian 4. Han havde studeret matematik i

København, som dengang bl.a inkluderede astronomi, landmåling og kartografi. I midten af 1600-tallet var hans kort ubestridt blandt de bedste, og det vedblev de med at være i en lang periode. På bagsiden af dette hæfte ses en detalje fra et af hans sønderjyske kort (1648). Bemærk detaljerigdommen og fx angivelsen af verdenshjørnerne, som indirekte fortæller en del kulturhistorie.

Trianguleringen i Danmark

Blandt de mange kort, der blev tegnet før 1700-tallet, var der et uløst problem: at få lokale kort til at hænge rigtigt sammen med andre lokale kort. Problemet bestod dels i, at uundgåelige småfejl ville blive summeret op ved sammentegning af mange kort, men værre: at de enkelte målebordsblade krympede en smule efter at være fjernet fra målebordet.

Først så sent som i 1764 startede Thomas Bugge [6] en opmåling, hvor hele landet blev delt ind i trekanter, som skabte et net til at placere lokale kort korrekt. Teknikken var: Bugge startede med en omhyggelig opmåling af én side i den første trekant (*basislinjen*). Derefter målte han vinklerne i de to trekantshjørner ved basislinjen: dvs. vinklen mellem basislinjen og en sigtelinje til det tredje punkt. Så kunne alle sider og vinkler bestemmes i denne første trekant med 180-gradersreglen og sinusrelationerne. Fra de beregnede sider i trekanten



Triangulering (Bugges første trekanter)

Basislinjen er den blå (omhygggeligt opmålte) linje fra Tinghøj til Brøndbye Høj. Alle øvrige (sorte) afstande er beregnet ved hjælp af vinklerne og basislinjen. Fra de nye punkter arbejdes der videre på trekantsnettet over Ballerup, Ølstykke ... til det fjerne Jylland.

6 http://www.geomat.dk/landmaaling/kildetekster/pdf/Triangulering.pdf

kunne man arbejde sig videre og opmåle nye trekanter udelukkende ved at bestemme vinkler. Således blev hele Danmark dækket af et net af trekanter, der kunne bruges til korrekt placering af de kort, der dækkede et mindre område. De lokale kort, der dækkede et areal på ca. 6,3 km x 9,4 km, udførtes som *målebordsblade* - se beskrivelsen senere i dette kapitel. Med trianguleringen kunne der nu tegnes et Danmarkskort, hvor de lokale kort kunne indplaceres korrekt. For endnu bedre at kunne indplacere lokalkortene rigtigt, blev der samtidigt med opmålingen af trekanternes hjørner også opmålt vigtige punkter som fx kirker.

Selvom arbejdet hurtigt kan skitseres, var det en enorm indsats, det tog over et halvt århundrede at fuldføre. Arbejdedet lettedes af, at instrumenterne til opmåling af vinkler var blevet meget nøjagtige, og at man ved hjælp af sinuselationerne kunne beregne afstandene ret nøjagtigt. Så man var ganske vist fri for det meget besværlige og arbejdskrævende arbejde med at opmåle afstande med undtagelse af basislinjen og nogle få verifikationsafstande, men mange opmålinger af den samme vinkel, besværlig transport, tunge beregninger osv. tog sin tid.

Ved samlingen af kortene blev *målestokken* ændret fra 1:20.000 til 1:120.000. Dertil benyttedes et tegneteknisk redskab: en *pantograf*, som kan ses her:

http://ressources.univlemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/pentographe.html

Målebordsblade

Samtidigt med trianguleringen blev landet opmålt og tegnet på *målebordsblade*. Det var meget detaljerede kort i målestokken 1:20.000. De fik en ganske lang levetid under forskellige myndigheder. Ihvertfald solgtes de stadig i boghandlen efter 1970 som fx M 2108 Finderup, opmålt 1877, rettet 1954, trykt i København 1964 ved Geodætisk Institut.

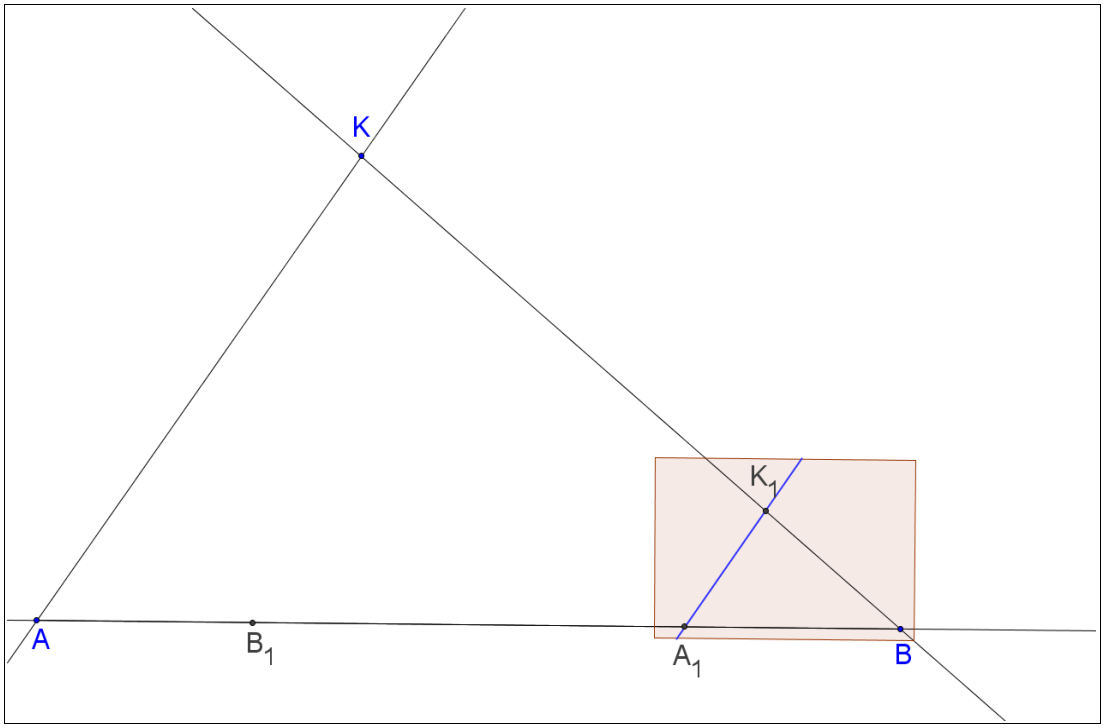
Det var teknikken ved fremstillingen, der gav dem navn. En lidt forenklet gengivelse af denne er: Man benyttede et bord, hvor det kommende kort blev fastgjort. 2 punkter (hvorfra der var en vis udsigt) A og B i naturen blev udvalgt, afstanden mellem dem målt, og punkterne overført til kortet med en tilsvarende (meget mindre) afstand mellem de tegnede punkter: lad os kalde dem A_1 og B_1.

Bordet blev så stillet op: først ved fx A med kortets A_1 præcist over A og linjen A_1B_1 lå lige over en del af AB.

Andre punkter i landskabet blev lagt ind ved at tegne sigtelinjer fra A_1 (A) på papiret sigtende fx mod et kirkespir K. Når et passende antal sigtelinjer mod vigtige punkter var indlagt, blev bordet flyttet til B med B_1 lige ovenover og igen A_1B_1 liggende over en del af AB. Når der så herfra blev tegnet en sigtelinje mod K var der dannet to ligedannede trekanter: ABK i naturen og $A_1B_1K_1$ på kortet. Med tilpas mange støttepunkter kunne den rutinerede kartograf indtegne øvrige detaljer på fri hånd.

Herunder er vist det rektangulære målebord efter at det er flyttet. I positionen, hvor A_1 lå over A (og B_1 lå over punktet i naturen markeret B_1), blev den blå sigtelinje tegnet.

Efter flytningen tegnes så en ny sigtelinje, og K_1´s position findes i skæringspunktet.



Oversigt

Du har lært

- Hvad sinus, cosinus og tangens betyder
- Hvilke sætninger der gælder i den retvinklede trekant, og hvorledes nogle af disse sætninger bevises
- Hvorledes du benytter dem til at beregne størrelser i den retvinklede trekant
- Hvorledes du benytter sinusrelationer, cosinusrelationer og andre formler til at beregne sidelængder, vinkelstørrelser og arealer i skævvinklede trekanter
- Hvorledes du formulerer en geometrisk model af virkeligheden og at modellen ikke er virkeligheden
- Hvorledes Danmark blev kortlagt

Kilder

J.L. Heiberg: EUCLID'S ELEMENTS OF GEOMETRY (Græsk tekst), oversat til engelsk af Richard Fitzpatrick
http://farside.ph.utexas.edu/euclid/Elements.pdf

26-6-2011

Rudi Thomsen: "Verdenshistorie 1", Gyldendal 1963

D. E. Joyce: Euclid's Elements

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

26-6-2011

"Euklids Elementer" oversat af cand. mag Thyra Eibe.

http://www.archive.org/stream/euklidselemente00euclgoog/euklidselemente00euclgoog_djvu.txt (Digital version)

http://www.archive.org/stream/euklidselemente00euclgoog/euklidselemente00euclgoog#page/n7/mode/2up (Billed version)

1-8-2011

http://www.geomat.dk/landmaaling/

http://www.matlex.dk/landmaaling.html

Stikordsregister

2. arealsætning....29
basislinjen....38
cosinusfunktionen....19
Cosinusrelationerne....30
Danmarkskort....37
Eksamensopgave....
  Ensvinklede trekanter....10
  Retvinklet trekant....25
  Skævvinklet trekant....35
enhedscirkel....14
ensvinklede trekanter....8
Geodætisk Institut....39
hosliggende katete....16
hypotenuse....15
Johannes Mejer....37
kateter....15
ligedannede....8
matematisk model, besvarelse....26
Model....26
modstående katete....16
Målebordsblade....39
målebordsblade....39
målestokken....39
pantograf....39
polygon....5
Ptolemæus fra Alexandria....37
Pythagoras sætning....21
Pythagoras, den omvendte sætning....21
radianer....15
retningspunktet....14
$\sin^{-1}$....18
sinusfunktionen....18
sinusfunktionen....15
Sinusrelationerne....28
sinustabel....19
Standardtrekanter....15
Sætning om retvinklet trekant....
  hk = hyp·cos(v)....20
  mk = hyp·sin(v)....19
  tan=mk/hk....20

Thomas Bugge....38
Trianguleringen....38
Tycho Brahe....37
vinkler....14
voksende funktion....23
Øvelser ....
Ensvinklede trekanter....11
Retvinklede trekanter....24
Skævvinklede trekanter....35

Grundtriß
der stat
APENRADE
mit dem
schloß
BRVNDLVNDT
Aō 1648
Die Maße der Ruten
20
120
Arensberg
Septentrio
Lang wat
Jürgns gard May
Oster kier
Kieler garde
Tükier beck
Kolstrup
Weg nach Bründe
Stat fennen
hopfen hofe
Kolstrup
limites
hopfen hofe
Nestmarck
Altewal
Weg nach New mohl
Schif hauen
Oriens
Occidens
Alte stat wal
Mühlen dam
APEN RADE
Newdam
Marsch
Süder brücke
Borgmühl
Dinghaus
Meyerhof
Steindam
Lünd Acker
Das schloß Brundlundt
Steindam
Kalbermaeß
Postmaeß
Meridies