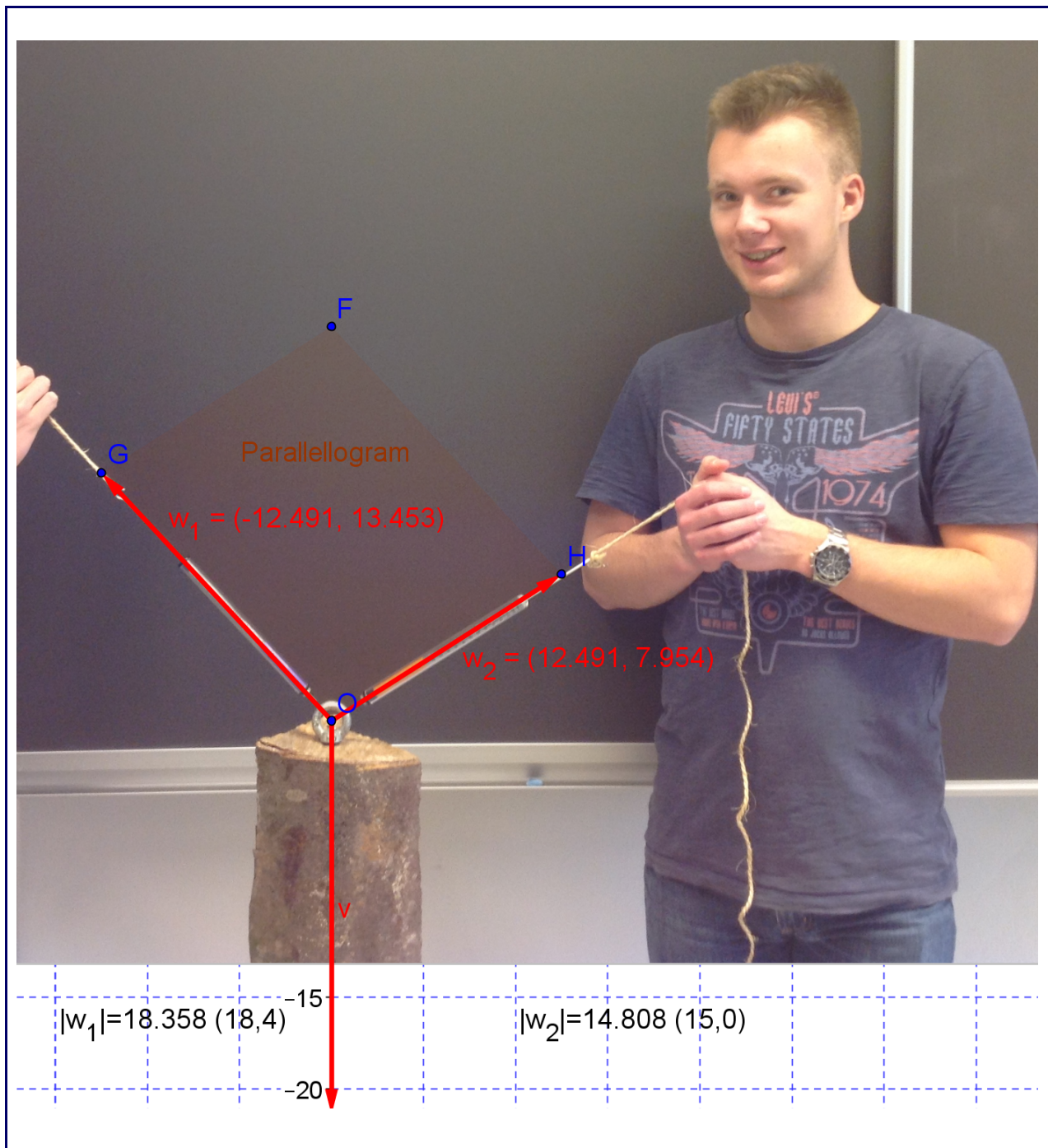


# Vektorer



Ib Michelsen

Ikast 2018

Forside: Daniel (og Kristian) demonstrerer "kræfternes parallelogram".

Bemærkninger om tegningen og notation: Vektorerne er  $v$ ,  $w_1$  og  $w_2$ . GeoGebra (som tegningen er lavet med) viser her vektorenes koordinater som rækkevektorer (på tegninger med Vis navn og værdi.) Normalt foretrækkes søjlevektorer, som GeoGebra viser vektorerne i algebravinduet.

Mht. notation: vektorer navngives her i teksten ofte med danske bogstaver som  $a$  og  $b$  eller  $u$ ,  $v$ ,  $w$  .... For at markere, at der er tale om vektorer benyttes enten fed skrift ( $v$ ) eller markering med en overliggende pil ( $\vec{v}$ ).

18-01-15

Enkelte trykfejl rettet i beviserne

9-1-18

Under stadig redaktion: tilføjer aksiomer for legemeog vektorrum og generelle sætninger; tilpasser resten

16-1-18: (Næsten) Færdig.

C:\Users\IbM\Dropbox\vektorer\Vektorer.odt

# Indholdsfortegnelse

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| Vektorrum.....                                        | 5  |
| Definition af et legeme.....                          | 5  |
| Definition af et vektorrum.....                       | 8  |
| Definition: Lineær afhængighed og uafhængighed.....   | 9  |
| Definition; Linearkombination.....                    | 9  |
| Sætning om lineær afhængighed .....                   | 9  |
| Sætninger.....                                        | 9  |
| Definition: span.....                                 | 11 |
| Definition: Basis i vektorrum.....                    | 11 |
| Entydighedssætningen.....                             | 11 |
| Sætning om udvidelse til en basis.....                | 11 |
| Dimensionssætningen.....                              | 12 |
| Dimensionsdefinitionen.....                           | 12 |
| Om det n-dimensionale koordinatvektorrum.....         | 12 |
| Det 2-dimensionale koordinatvektorrum.....            | 12 |
| Definition af bijektion.....                          | 13 |
| Definition af isomorfe vektorrum.....                 | 13 |
| Sætning om isomorfe vektorrum.....                    | 13 |
| Geometriske vektorer i planen.....                    | 15 |
| Definition.....                                       | 15 |
| Definitioner.....                                     | 15 |
| Sætning om geometriske vektorer.....                  | 16 |
| Sætning om basis.....                                 | 17 |
| Corollar I.....                                       | 18 |
| Corollar II.....                                      | 18 |
| Vektorer i planen.....                                | 19 |
| Eksempler.....                                        | 19 |
| Vektorer i GeoGebra.....                              | 20 |
| Geometriske vektorer i planen og $\mathbf{R}^2$ ..... | 23 |
| Definition af enhedsvektor.....                       | 23 |
| Prikprodukt (Definition).....                         | 24 |
| Længden af en vektor.....                             | 24 |
| Vinklen mellem 2 vektorer.....                        | 25 |
| Sætninger om prikproduktet.....                       | 25 |
| Definitioner.....                                     | 26 |
| Flytning ved parallelforskydning.....                 | 26 |
| Additionssætninger.....                               | 26 |
| Projektion (Definition).....                          | 27 |
| Projektion (Sætning).....                             | 27 |

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| Sætning om tværvektor.....                            | 28 |
| Matrix definition.....                                | 28 |
| Definition af Determinant ( $n=2$ ).....              | 28 |
| Determinant-sætning.....                              | 29 |
| Arealsætninger.....                                   | 29 |
| Beregning af $\det(u,v)$ .....                        | 30 |
| Linjens parameterfremstilling.....                    | 30 |
| Linjens ligning.....                                  | 31 |
| Produktet af to hældningskoefficienter (Sætning)..... | 32 |
| Afstande.....                                         | 32 |
| Mellem 2 punkter.....                                 | 32 |
| Mellem punkt $Q$ og linje $l$ .....                   | 33 |
| Cirklens ligning.....                                 | 33 |
| Determinantmetoden.....                               | 34 |
| Find linjers skæringspunkter.....                     | 35 |
| Stikordsregister.....                                 | 37 |

# Vektorrum

Du husker forhåbentlig, at der findes nogle regler for, hvorledes man regner med tal. Men vi har egentlig ikke diskuteret grundlaget for disse regler. Det vil vi komme lidt nærmere ind på i det følgende som et grundlg for at arbejde med vektorer. Vi vil starte med at definere et *legeme*, som du kender to eksempler på: de reelle tal og de rationale tal.<sup>1</sup>

## Definition af et legeme

Et legeme er en mængde  $L$ , hvor der er defineret to regneoperationer: addition og multiplikation og hvor der gælder nedenstående aksiomer:

1.  $\forall a, b \in L : a + b \in L$  (Dvs. at ved addition dannes der et element, der tilhører  $L$ )
2.  $\forall a, b \in L : a \times b \in L$  <sup>2</sup> (og tilsvarende for multiplikation)
3.  $\forall a, b \in L : a + b = b + a$  (Den kommutative lov for addition)
4.  $\forall a, b \in L : a \times b = b \times a$  (Den kommutative lov for multiplikation)
5.  $\forall a, b, c \in L : (a + b) + c = a + (b + c)$  (Den associative lov for addition)
6.  $\forall a, b, c \in L : (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$  (Den associative lov for multiplikation)
7.  $\exists 0 \in L : \forall a \in L : a + 0 = a$  (Der findes et nul-element i legemet  $L$ )
8.  $\exists 1 \in L : \forall a \in L : a \times 1 = a$  (Der findes et et-element i legemet  $L$ )
9.  $\forall a \in L : \exists b \in L : a + b = 0$  ( $b$  kaldes det modsatte element og skrives ofte  $(-a)$ )
10.  $\forall a \in L \setminus \{0\} : \exists b \in L : a \times b = 1$  ( $b$  kaldes det reciprokke element og skrives ofte  $(a^{-1})$ )
11.  $\forall a, b, c \in L : a \times (b + c) = a \times b + a \times c$  (Den distributive lov)

Med udgangspunkt i disse aksiomer kan vi for de to nævnte eksempler på legemer udlede alle de sædvanlige regneregler. Herunder sætninger der siger, at et legeme har præcis et nul-element og et et-element og for hvert element præcis et modsat element og et reciprokt element (med den nævnte undtagelse.)

### Øvelse 1

- Vis, at der i et legeme kun er et nulelement  $0_1$  (Tip: start med  $0_2 = 0_2 + 0_1 \dots$ ), hvor  $0_2$  er et andet nulelement. Beregningen skal vise, at  $0_2 = 0_1$ .
- Vis, at der i et legeme for hvert element  $a$  ikke eksisterer flere modsatte elementer som  $b_1$  og  $b_2$ . (Tip: start med  $b_1 = b_1 + 0 = b_1 + (a + b_2) \dots$ )

1 For en bedre og grundigere beskrivelse: Se Paul R. Halmos: Finite-Dimensional Vector Spaces, (<https://archive.org/stream/HalmosP.R.FiniteDimensionalVectorSpaces.SpringerVerlag205s>)

2 Der er brugt et andet multiplikationstegn end sædvanligt for at signalere, at både addition og multiplikation defineres specielt for hvert legeme. For de to nævnte eksempler på legemer virker addition og multiplikation som sædvanligt.

## Det modsatte element af $(a + b)$

Bemærk, at  $(a + b)$  er et element i legemet; vi ønsker at finde det modsatte element til dette. Som sædvanlig kaldes det modsatte element det samme, men med et foranstillet minustegn:  $-(a + b)$ .

Påstanden, som bevises herunder er:  $-(a + b) = (-a) + (-b)$ . Vi vil vise, at  $(a + b)$  og  $(-a) + (-b)$  er modsatte elementer ved at vise, at deres sum er 0. Selvom beviset bliver lidt omstændeligt, benyttes kun aksiomerne i bevisførelsen.

|                             |                                                                                                                       |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $(a + b) + ((-a) + (-b)) =$ | Her er udtrykket, vi vil vise er 0 (nul).<br>Opfat den røde parentes som 2 elementer, hele den grønne som et element. |
| $a + (b + ((-a) + (-b))) =$ | Vi benytter den associative lov for addition                                                                          |
| $a + (b + ((-b) + (-a))) =$ | Så benyttes den kommutative lov for addition                                                                          |
| $a + ((b + (-b)) + (-a)) =$ | Og igen benyttes den associative lov for addition på de tre grønne elementer                                          |
| $a + (0 + (-a)) =$          | Selvfølgelig er $b + (-b) = 0$                                                                                        |
| $a + ((-a) + 0) =$          | Igen benyttes den kommutative lov for addition                                                                        |
| $a + (-a) = 0$              | Først benyttes, at 0 er et nul-element og dernæst, at $a$ og $(-a)$ er modsatte elementer.                            |

## Sprogbrug

Når man adderer størrelserne  $a$  og  $(-b)$  vil det kunne skrives som  $a + (-b) = a - b$ ; vi siger, at vi *subtraherer*  $b$ .

Tilsvarende ved multiplikation med den reciprokke til  $b$ :  $a \times b^{-1} = \frac{a}{b}$ ; vi siger, at vi *dividerer* med  $b$ .

### Øvelse 2

- Vis, at  $\forall a, b \in L \setminus \{0\} : (a \times b)^{-1} = (a^{-1} \times b^{-1})$

## Øvelse 3

- Vis, at de kendte brøkregler gælder:
  1. Hvordan man multiplicerer en brøk med et tal
  2. Hvordan man forlænger en brøk
  3. Hvordan man multiplicerer en brøk med en brøk
  4. Hvordan man dividerer en brøk med et tal
  5. Hvordan man dividerer en brøk med en brøk

## Øvelse 4

- Lad os studere et meget specielt legeme, som kun har de to elementer: 0 og 1.
- Først skal du bestemme, hvorledes resultaterne af addition er: Fx  $0+0$ ,  $1+0$  osv. Udfyld tabellen her (og benyt aksiomerne). Der kun en rigtig mulighed i hver celle:

|   | <i>Summer</i> |   |
|---|---------------|---|
|   | 0             | 1 |
| 0 |               |   |
| 1 |               |   |

- Tilsvarende opgave for produkter:

|   | <i>Produkter</i> |   |
|---|------------------|---|
|   | 0                | 1 |
| 0 |                  |   |
| 1 |                  |   |

- Når de to tabeller er udfyldte, skal du kontrollere, at alle aksiomerne er opfyldte

## Øvelse 5

- En udfordring
  - Samme slags opgave som i øvelse 4, men nu er der 3 elementer: 0, 1 og a. Kan du finde alle 9 summer og alle 9 produkter? Er der en eller flere løsninger?

## Vektorer

Når vi skal arbejde med vektorer er det vigtigt at kende ovenstående grundlag, da flere af de sætninger, vi beviser, benytter aksiomer eller sætninger gældende for det benyttede legeme.

I et *vektorrum* benyttes to forskellige slags elementer: vektorer ( $u, v, w$ ) som er elementer i  $V$  og skalarer ( $a, b$ ) som er elementer i det benyttede legeme. I fremstillingen her skrives vektorer med fed skrift eller med en pil over betegnelsen:  $u = \vec{u}$ . De vektorrum, der behandles her, har alle en endelig dimension (se definitionen senere.)

### Definition af et vektorrum

Et vektorrum over et legeme  $L$  er en mængde  $V$  med to regneoperationer: *vektoraddition* og *multiplikation af vektor med skalar*<sup>3</sup> Elementerne i  $L$  kaldes skalarer og i  $V$  vektorer. For vektorrummet gælder de nedenstående aksiomer.

1.  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{v} \in V$  (Dvs. at ved vektoraddition dannes der et element, der tilhører  $V$ )
2.  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (Den kommutative lov for vektoraddition)
3.  $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V : (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$  (Den associative lov for vektoraddition)
4.  $\exists \vec{0} \in V : \forall \vec{u} \in V : \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$  (Der findes en nulvektor)
5.  $\forall \vec{u} \in V : \exists \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$  (Der findes en modsat vektor;  $\vec{v} = -\vec{u}$ )
6.  $\forall (a, \vec{u}) \in L \times V : a \vec{u} \in V$  (Produkt af en skalar og en vektor er en vektor i mængden  $V$ )
7.  $\forall (a, b, \vec{u}) \in L \times L \times V : a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$  (En associativ regel, hvor der på venstre side er to multiplikationer af skalar og vektor, mens der på højre side både er en multiplikation i legemet og en multiplikation af skalar og vektor.)
8.  $\forall \vec{u} \in V : 1 \vec{u} = \vec{u}$  (Multiplikation med skalar 1)
9.  $\forall (a, \vec{u}, \vec{v}) \in L \times V \times V : a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$  (En distributiv regel for addition i  $V$ )
10.  $\forall (a, b, \vec{u}) \in L \times L \times V : (a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$  (En distributiv regel for addition i  $L$ )

Om notation herunder: En mængde  $\{ \vec{u}_i \}$  er en endelig mængde af vektorer, evt. tom.

$\sum_i \vec{u}_i$  er så summen af disse vektorer. Hvis mængden er tom, er summen nulvektoren.

Bemærk, at *subtraktion* ikke er defineret, men kan indføres som:  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ . Med denne definition og i kraft af (2) og (3) får følgende udtryk mening:  $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} + \vec{x}$

<sup>3</sup> Selvom vi - desværre meget forvirrende - også her benytter addition og multiplikation og sågar benytter samme tegn (eller underforstår dem), er det forskellige operationer afhængig af, om det er vektorer eller skalarer eller skalar og vektor, der benyttes i beregningen. Og bemærk: regneoperationerne afhænger også af, hvordan vektorrummet er defineret. I de vektorrum, du skal kende, kommer der yderligere to andre former for produkter til for at gøre det endnu mere forvirrende.



## Definition: Lineær afhængighed og uafhængighed

En mængde af vektorer  $\{ \vec{u}_i \}$  er *lineært afhængige*, hvis der eksisterer en tilsvarende mængde  $\{ a_i \}$  af skalarer, hvor ikke alle er nul, således at  $\sum_i a_i \vec{u}_i = \vec{0}$ .

Men hvis det gælder for  $\{ \vec{u}_i \}$  at  $\sum_i a_i \vec{u}_i = \vec{0}$  medfører, at  $a_i = 0$  for alle  $i$ , kaldes mængden af vektorer *lineært uafhængige*. (Dette gælder også den tomme mængde.)

## Definition: Linearkombination

$\vec{u} = \sum_i a_i \vec{u}_i$  kaldes en *linearkombination* af  $\{ \vec{u}_i \}$ .

## Sætning om lineær afhængighed

Mængden  $\{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \}$  (hvor ingen er nulvektoren) er lineært afhængige, hvis og kun hvis:

$$\exists k \in \{2, \dots, n\} : \vec{u}_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i \vec{u}_i$$

## Bevis

Antag at  $\{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \}$  er lineært afhængige. Så eksisterer der et første  $k$ , således at  $\{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \}$  er lineært afhængige.

Så vil  $a_1 \vec{u}_1 + \dots + a_k \vec{u}_k = \vec{0}$  for passende valg af skalarer. Ydermere vil  $a_k \neq 0$ ; ellers ville dette  $a_k$  ikke være "første skalar". Men så kan  $\vec{u}_k$  let isoleres i ligningen.

Antag omvendt:  $\exists k \in \{2, \dots, n\} : \vec{u}_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i \vec{u}_i$ ; så følger umiddelbart, at mængden af de første  $k$  vektorer er lineært afhængige. Da  $\{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \}$  indeholder de første  $k$  vektorer (altså en lineært afhængig delmængde), bliver  $\{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \}$  også lineært afhængig.

## Sætninger

### 1. Der eksisterer kun en nulvektor

Antag, at der findes mere end en:  $\vec{0}_1$  og  $\vec{0}_2$

$$\vec{0}_1 = \vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2 + \vec{0}_1 = \vec{0}_2$$

### Øvelse 6

- Vigtigt:
  - Her og i de følgende sætninger bør du notere, hvilke sætninger / aksiomer der er benyttet ved omskrivningerne.

2. Enhver vektor  $\vec{u} \in V$  har kun en modsat vektor:  $-\vec{u}$

Lad  $\vec{u}$  have flere modsatte elementer:  $\vec{v}_1$  og  $\vec{v}_2$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{0} = \vec{v}_1 + (\vec{u} + \vec{v}_2) = (\vec{v}_1 + \vec{u}) + \vec{v}_2 = \vec{0} + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{0} = \vec{v}_2$$

3.  $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$  Den kommutative lov for addition af vektorer - også for  $\vec{0}$

$$\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

4.  $-\vec{0} = \vec{0}$  Det modsatte element til nulvektoren

$$-\vec{0} = -\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

5.  $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$  Produktet af en skalar med nulvektoren er nulvektoren

$$k \cdot \vec{u} = k \cdot (\vec{u} + \vec{0}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{0} \Rightarrow k \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

6.  $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$  Produktet af skalar 0 med en vilkårlig vektor er nulvektoren

$$\vec{u} = 1 \cdot \vec{u} = (1 + 0) \cdot \vec{u} = 1 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{u} = \vec{u} + 0 \cdot \vec{u} \Rightarrow 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

7.  $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$  Den modsatte vektor kan findes som produkt af -1 og vektoren

$$\begin{aligned} (-1) \cdot \vec{u} &= (-1) \cdot \vec{u} + \vec{0} = (-1) \cdot \vec{u} + (\vec{u} + (-\vec{u})) = ((-1) \cdot \vec{u} + \vec{u}) + (-\vec{u}) = \\ &= ((-1) \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{u}) + (-\vec{u}) = (-1 + 1) \cdot \vec{u} + (-\vec{u}) = 0 \cdot \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} + (-\vec{u}) = -\vec{u} \end{aligned}$$

8.  $k \cdot \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow k = 0 \vee \vec{u} = \vec{0}$  Nulregel I

1. Vi skal vise, at er et produkt af en skalar og en vektor nulvektoren, er mindst en af faktorerne nul / nulvektor. Vi viser, at er produktet nulvektoren, kan de to faktorer ikke begge være forskellige fra nul / nulvektoren.

2. Antag, at  $k \neq 0 \wedge k \cdot \vec{u} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} k \cdot \vec{u} &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{k} (k \cdot \vec{u}) &= \frac{1}{k} (\vec{0}) \Leftrightarrow \\ \left(\frac{1}{k}\right) \cdot \vec{u} &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ 1 \cdot \vec{u} &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ \vec{u} &= \vec{0} \end{aligned}$$

9.  $k \cdot \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0 \vee \vec{u} = \vec{0}$  Nulregel II

Denne sætning er blot en sammenfatning af sætningerne 5, 6 og 8..

10.  $\vec{y} + (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{x}$  Addition af differens

$$\vec{y} + (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{y} + (\vec{x} + (-\vec{y})) = \vec{y} + ((-\vec{y}) + \vec{x}) = (\vec{y} + (-\vec{y})) + \vec{x} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$$

**Definition: span**

Lad der være givet en mængde af vektorer:  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ ; ved *udspændingen* af denne mængde forstås mængden af alle tænkelige vektorer, der kan laves som linearkombinationer af disse. Denne mængde kaldes *span*  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ .

**Definition: Basis i vektorrum**

En *basis* i et vektorrum er en mængde af lineært uafhængige vektorer  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  fra  $V$ , som udspænder hele vektorrummet  $V$ .

**Entydighedssætningen**

For enhver vektor  $\vec{u}$  i  $V$  med basis  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$  kan vektoren skrives som en unik linearkombination af basisvektorerne:  $\vec{u} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{u}_i$ .

**Bevis**

Antag, at der fandtes en anden linearkombination  $\vec{u} = \sum_{i=1}^n b_i \vec{u}_i$ . Ved subtraktion findes

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \vec{u}_i, \text{ men da basisvektorerne er lineært uafhængige, er alle skalarerne } (a_i - b_i) = 0, \text{ og dermed er der ikke en anden linearkombination.}$$

**Sætning om udvidelse til en basis**

Lad  $V$  være et vektorrum og  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$  en vilkårlig mængde af lineært uafhængige vektorer. Hvis denne mængde ikke allerede udgør en basis, kan den udvides med vektor(er) indtil den udgør en basis.

**Bevis**

Vi udvider den givne mængde med vektorerne i en basis:  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ . Da de første vektorer kan skrives som linearkombinationer af basisvektorerne, er vektorerne i den udvidede mængde lineært afhængige. Med sætningen om Lineær afhængighed (se side 9) findes den første vektor, der kan skrives som en linearkombination af de foregående vektorer. Det må nødvendigvis være en af vektorerne fra den tilføjede basis (da de første var lineært uafhængige.) Den fjernes fra mængden. Bemærk, at den nye mængde stadig udspænder hele vektorrummet. (Begrund det!) Hvis den nye mængdes vektorer er lineært uafhængige er vi færdige og har fundet en basis. Ellers gentages proceduren indtil vi står med en basis.

## Dimensionssætningen

Enhver basis i vektorrummet  $V$  indeholder det samme antal basisvektorer.

Sætningen kan bevises på en måde, der ligner det foregående bevis.

## Dimensionsdefinitionen

Dimensionen af et vektorrum er lig med antallet af vektorer i en basis for vektorrummet.

## Om det $n$ -dimensionale koordinatvektorrum

Talpar som  $(-2, 5)$ , taltripler som  $(1, 2, 5)$  og taltupler  $(-2, 8, 6, \dots, 13)$  er alle eksempler på koordinatvektorer. Hvis tallene (eller koordinaterne) som her er reelle tal, kaldes vektorrummet  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Ofte skrives vektorerne som søjler, men her er der i mange tilfælde valgt at skrive dem som rækker (af pladshensyn.).

## Det 2-dimensionale koordinatvektorrum

I dette tilfælde defineres sum af vektorer og produkt af skalar og vektor, og der vises, at  $\mathbb{R}^2$  er et vektorrum. Du kan selv kopiere fremgangsmåden og vise det tilsvarende i det  $n$ -dimensionale vektorrum.

Som legeme benyttes  $\mathbb{R}$  og som koordinater (dvs. tallene i talparrene) elementer fra  $\mathbb{R}$ , dvs. reelle tal. Vektorerne i koordinatvektorrummet er fx.  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ , og de kan skrives:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

## Definitioner

1. Sum af vektorer:  $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$
2. Produkt af skalar og vektor:  $a \cdot \vec{u} = a \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot u_1 \\ a \cdot u_2 \end{pmatrix}$
3. Nulvektor:  $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. Det modsatte element til  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  er  $-\vec{u} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}$

### Øvelse 7

- Vis med disse definitioner, at alle aksiomerne for vektorrum er opfyldt. (Jævnfør side 8). Gør det meget detaljeret og noter, hvilke sætninger, du benytter.

## Definition af bijektion

En bijektion  $T$  er en funktion, hvor to forskellige elementer i definitionsområdet altid har forskellige funktionsværdier (er *injektiv*), og hvor værdimængden for  $T$  udgør hele den mængde, der afbildes på (er *surjektiv*).

## Definition af isomorfe vektorrum

To vektorrum  $V_1$  og  $V_2$  over samme legeme kaldes isomorfe, hvis der findes en bijektion  $T$  fra  $V_1$  til  $V_2$ , som opfylder nedenstående betingelse for vilkårlige vektorer  $\vec{u}, \vec{v} \in V_1$  og vilkårlige skalarer  $a, b \in L$  :

$$T(a\vec{u} + b\vec{v}) = aT(\vec{u}) + bT(\vec{v})$$

## Sætning om isomorfe vektorrum

Ethvert  $n$ -dimensionalt vektorrum  $V$  over et legeme  $L$  er isomorft med  $L^n$

Bemærkning: I denne fremstilling vil man næsten altid benytte legemet  $\mathbb{R}$ .

## Bevis

Lad der være givet en vilkårlig basis:  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  i  $V$ . En vilkårlig vektor kan så skrives som en linearkombination af disse, hvor skalarerne er entydigt bestemt:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{u}_i$$

Definer  $T$  ved  $T(\vec{u}) = (a_1, \dots, a_n)$ ; tilsvarende  $T(\vec{v}) = (b_1, \dots, b_n)$  fås

$$\begin{aligned} T(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) &= T((\alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1)\vec{u}_1 + \dots + (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)\vec{u}_n) = (\alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1, \dots, \alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \\ &= (\alpha \cdot a_1, \dots, \alpha \cdot a_n) + (\beta \cdot b_1, \dots, \beta \cdot b_n) = (\alpha \cdot a_1, \dots, \alpha \cdot a_n) + (\beta \cdot b_1, \dots, \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot (a_1, \dots, a_n) + \beta \cdot (b_1, \dots, b_n) = \\ &= \alpha \cdot T(\vec{u}) + \beta \cdot T(\vec{v}) \end{aligned}$$

hvilket giver isomorfien med definitionerne side 12.

## Bevis (n=2)

Lad os tydeliggøre det med tilfældet  $n=2$ .

Lad  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  være en basis og  $\vec{u} = a_1 \cdot \vec{u}_1 + a_2 \cdot \vec{u}_2$ ,  $\vec{v} = b_1 \cdot \vec{u}_1 + b_2 \cdot \vec{u}_2$

Så er  $T$  defineret ved  $T(\vec{u}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  og tilsvarende fås  $T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ .

Vi vil nu vise, at denne funktion opfylder betingelsen  $T(a\vec{u} + b\vec{v}) = aT(\vec{u}) + bT(\vec{v})$ , hvor vi blot benytter de tilsvarende græske bogstaver for  $a$  og  $b$ .

## Vektoren

$$T(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = T(\alpha(a_1 \cdot \vec{u}_1 + a_2 \cdot \vec{u}_2) + \beta(b_1 \cdot \vec{u}_1 + b_2 \cdot \vec{u}_2)) =$$

$$T(\alpha \cdot a_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha \cdot a_2 \cdot \vec{u}_2 + \beta \cdot b_1 \cdot \vec{u}_1 + \beta \cdot b_2 \cdot \vec{u}_2) =$$

$$T(\alpha \cdot a_1 \cdot \vec{u}_1 + \beta \cdot b_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha \cdot a_2 \cdot \vec{u}_2 + \beta \cdot b_2 \cdot \vec{u}_2) =$$

$$T((\alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1) \vec{u}_1 + (\alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2) \vec{u}_2) =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 \\ \alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \cdot b_1 \\ \beta \cdot b_2 \end{pmatrix} =$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$$

$$\alpha T(u) + \beta T(v)$$

# Geometriske vektorer i planen

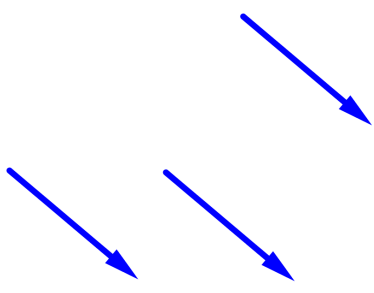
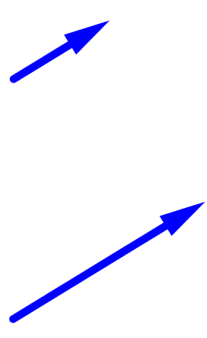
## Definition

En repræsentant for en geometrisk vektor  $v$  er et orienteret linjestykke fra et begyndelsespunkt  $A$  til et endepunkt  $B$ . Den siges at have en *retning*, som er givet ved rækkefølgen af de to punkter. Her kan vektoren skrives:  $v = \overrightarrow{AB}$ . Alle orienterede linjestykker med samme længde og samme retning er repræsentanter for den samme vektor! <sup>4</sup>

Hvis  $A=B$  kaldes vektoren *nulvektoren*; den har længden 0 (nul) og tillægges ingen retning. Hvis  $A \neq B$  kaldes vektoren en *egentlig vektor*.

Lad der i planen være et givet linjestykke, som vi giver længden 1. Alle egentlige vektorer får så tillagt *længder* i forhold til dette som et reelt positivt tal. Nulvektoren har længden 0. (Længden af vektor  $v$  skrives  $|v|$ .)

At to egentlige vektorer har samme retning betyder, at linjestykkerne er parallelle og at repræsentanter med fælles begyndelsespunkt, har mere end et punkt fælles.

|                                                                                    |                                                                                    |                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |
| 3 repræsentanter for samme vektor                                                  | 2 vektorer med samme retning                                                       | Nulvektorer                                                                           |

## Definitioner

Summen af vektorerne  $u = \overrightarrow{AB}$  og  $v$  fås ved at vælge en repræsentant for  $v$  med begyndelsespunkt  $B$ ; dvs.  $v = \overrightarrow{BC}$ .

Så bliver summen af vektorerne en vektor  $w = u+v = \overrightarrow{AC}$

Bemærk: Heraf følger, at  $\forall C: \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$  (Indskudssætningen)

Produktet af det reelle tal  $t$  og vektoren  $v$  er

- hvis  $t = 0$  eller  $v =$  nulvektoren: er produktet nulvektoren
- hvis  $v$  er en egentlig vektor

<sup>4</sup> Planen er et eksempel på et Euklidisk rum (indeholdende punkter) med vektorrummet  $V$ , hvor der til punktpar svarer en vektor mellem punkterne og til punkt og vektor et nyt punkt, så der til punktparret svarer den givne vektor. Et punkt  $A$  har samme koordinater som stedvektoren til punktet ( $\overrightarrow{OA}$ ).

## Vektorer

- hvis  $t > 0$ : er produktet en egentlig vektor med samme retning som  $v$  og en længde, som er  $t$  gange længere end  $v$ .
- hvis  $t < 0$ : er produktet en egentlig vektor med modsat retning af  $v$  og en længde, som er  $|t|$  gange længere end  $v$ . Modsat retning vil sige, at der byttes om på begyndelsespunkt og endepunkt.

Den modsatte vektor til  $v = \overrightarrow{AB}$  er vektoren  $\overrightarrow{BA}$ . Den kaldes  $-v$ .

### Øvelse 8

- Er definitionen af summen af vektorer entydig? (Eller kunne man ved at vælge forskellige repræsentanter få forskellige resultater?)

## Sætning om geometriske vektorer

De geometriske vektorer er et vektorrum  $V$  over de reelle tals legeme med addition og produkt af skalar og vektor defineret som ovenfor.

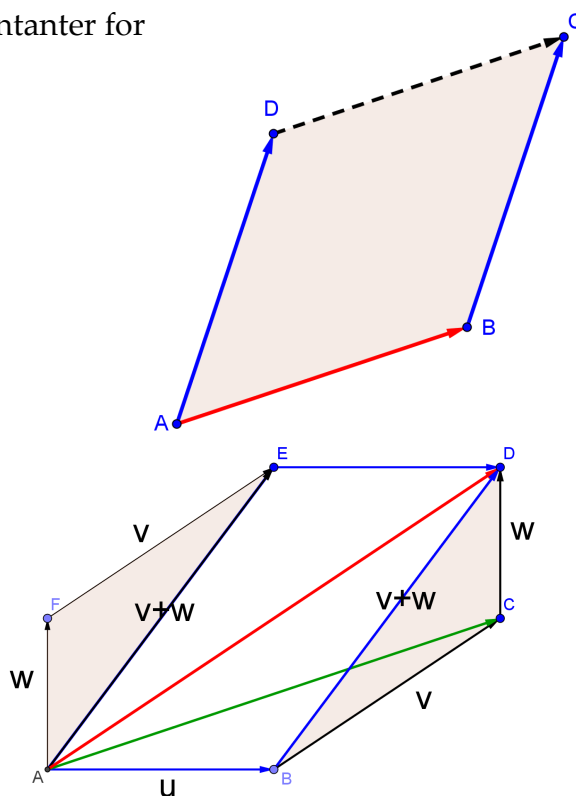
## Bevis

For at bevise påstanden skal vi vise, at de ti aksiomer på side 8 er opfyldt.

1. Aksiomet er opfyldt ifølge definitionen af sum
2. Lad  $u = \overrightarrow{AB}$ ; for  $v$  benyttes to repræsentanter for  $v = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ . Så ses, at  $ABCD$  er et parallelogram, hvorfor  $u = \overrightarrow{DC}$  og  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \vec{AC}$ .

3. Den associative lov gælder, fordi:

1.  $\overrightarrow{AD} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
2.  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$
3. Dvs, at  $\overrightarrow{AD} = (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
4. Da venstresiderne i (1) og (3) er ens, gælder det også for højresiderne.





4. Nulvektoren er direkte defineret og findes derfor ...
5. Produktet af skalar og vektor er direkte defineret for alle kombinationer af tal (dvs. skalarer fra de reelle tals legeme) og vektorer.
6. Den modsatte vektor  $-v$  til  $v$  er defineret, og der gælder:
  1.  $v + (-v) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$
7. I ligningen  $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$  findes en vektor på begge sider; beregnes længden af dem fås samme resultat på begge sider i kraft af den associative lov for multiplikation i de reelle tal. Hvis  $u$  er nulvektoren, er ligningen opfyldt. Hvis den er en egentlig vektor vil retningen for begge være som retningen for  $u$ , hvis produktet  $ab$  er positivt, modsat retningen for  $u$ , hvis samme produkt er negativt og hvis produktet er nul vil resultatet være nulvektoren på begge sider.
8. At  $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$  følger umiddelbart af definitionen på produkt af skalar og vektor
9. Den distributive regel for addition i  $V$  fås ved at sammenligne diagonalerne i parallelogrammerne med siderne  $u$  og  $v$ , hhv.  $au$  og  $av$ .
10. Den distributive regel for addition i  $L$  (her de reelle tal):  $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$  ses nemt at være omfyldt når vektoren er nulvektoren. Det samme gælder, hvis  $a+b=0$ . At både længde og retning er ens på begge sider i sidste tilfælde (for en egentlig vektor og  $a+b \neq 0$ ) er også nemt at indse, når du benytter den distributive regel for reelle tal.

#### Øvelse 9

- Er  $(u+v)+w = (w+u)+v$  ?
- Hvis svaret er ja, ser vi (sammenholdt med den kommutative regel for summer), at vi kan undlade plus-parenteser og addere vektorerne i en vilkårlig rækkefølge!

#### Sætning om basis

To vilkårlige egentlige vektorer  $u$  og  $v$  i planen, hvis linjestykker ikke er parallelle, udgør en basis for planen.

#### Bevis

Et tilfældigt punkt i planen  $O$  vælges som begyndelespunkt for repræsentanterne for basisvektorerne. Lad  $w$  være en vilkårlig vektor. Opgaven er at vise, at den er en linearkombination af basisvektorerne, og at basisvektorerne er lineært uafhængige, se side 11. Det sidste er klart: ingen af dem kan skrives som en linearkombination af den anden.

## Vektorer

For at vise den første del benyttes en repræsentant for  $w$ , som også har begyndelsespunkt i  $O$ .

Hvis  $w$  er nulvektoren, er  $\vec{w} = 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$

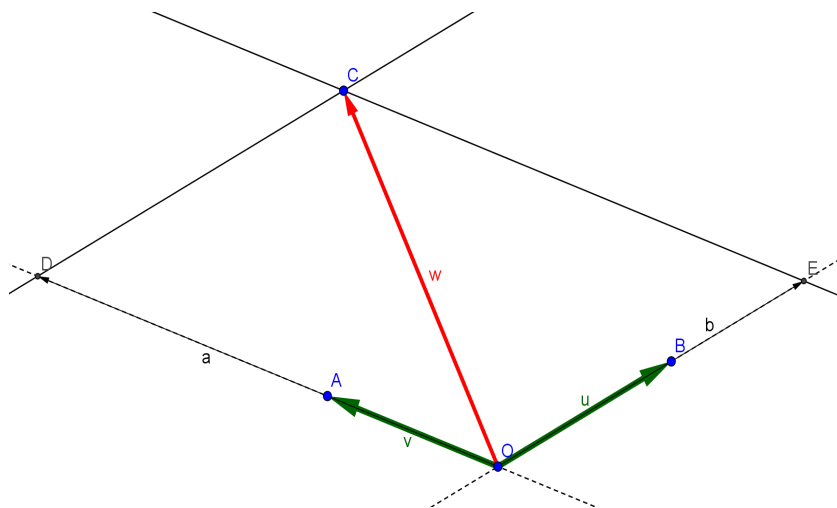
Hvis  $w$  er parallel med en af basisvektorerne fx  $\vec{v}$ , er  $\vec{w} = r \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{u}$

I alle andre tilfælde kan der tegnes et parallelogram med sider gennem basisvektorerne og med  $w$  som diagonal. Da

$$\vec{a} = r \cdot \vec{v} \quad \text{og} \quad \vec{b} = s \cdot \vec{u} \quad \text{og}$$

$$\vec{DC} = \vec{b} \quad \text{er}$$

$$\vec{w} = \vec{a} + \vec{DC} = \vec{a} + \vec{b} = r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{u}$$



### Corollar I

Planen som vektorrummet  $V$  over legemet  $\mathbb{R}$  har dimensionen 2

### Corollar II

Vektorrummet  $V$  er isomorft med vektorrummet  $\mathbb{R}^2$

#### Øvelse 10

- Åbn GeoGebra og luk alle vinduer undtagen tegneblokken. Fjern akser og tern.
- Vælg et punkt som origo ( $O$ ) - og hvis ikke andet nævne tegnes alle vektorer med  $O$  som begyndelsespunkt..
- Tegn to basisvektorer:  $u$  og  $v$ .
- Tegn  $\vec{w} = 2 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v}$
- Tegn  $-v$
- Tegn  $3/7 u$
- Idet der er givet et linjestykke med længden 1, skal du tegne vektoren  $\vec{a} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

## Vektorer i planen

I gymnasiet beskæftiger man sig normalt kun med vektorer i rum og i plan. Vi kan arbejde med vektorer som geometriske vektorer (uden noget koordinatsystem) eller som vektorer tilhørende  $\mathbf{R}^n$  ( $n=2$  eller  $n=3$ ). I det sidste tilfælde skrives vektorerne som talpar eller taltripler. Vi har vist, at de geometriske vektorrum og  $\mathbf{R}^n$  er isomorfe, hvilket betyder, at "alt, hvad der foregår i det ene vektorrum, foregår fuldstændig tilsvarende i det andet."

Man kan godt arbejde med vektorer uden at have defineret en basis (et koordinatsystem), men med et koordinatsystem gøres mange beregninger lettere.

### Eksempler

Lad der være givet en basis i Det Geometriske Vektorrum  $V$  bestående af vektorerne  $\vec{u}_1$  og  $\vec{u}_2$ . Så kan enhver vektor  $u$  skrives som en entydigt bestemt linearkombination af basisvektorerne:  $\vec{u} = a_1 \cdot \vec{u}_1 + a_2 \cdot \vec{u}_2$  og der eksisterer bijektionen  $T$ , som

- er defineret ved  $T(\vec{u}) = T(a_1 \cdot \vec{u}_1 + a_2 \cdot \vec{u}_2) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ , som er en funktion med definitionsmængde  $V$  og værdimængde  $\mathbb{R}^2$ ,
- og har egenskaben  $T(a\vec{u} + b\vec{v}) = aT(\vec{u}) + bT(\vec{v})$

Hvis der skal findes en linearkombination af geometriske vektorer, kan man nemt finde de tilsvarende koordinatvektorer, finde den tilsvarende linearkombination af koordinatvektorer og til sidst den hertil svarende geometriske vektor. De to vektorer  $\vec{u}$  og  $T(\vec{u})$  er så tæt forbundne, at man ikke altid tænker over, at de hører hjemme i hver sit vektorrum.

#### Eksempel

Lad  $u$  og  $v$  være defineret som herunder ved hjælp af basisvektorerne

$$\vec{u} = 3 \cdot \vec{u}_1 - 7 \cdot \vec{u}_2 \quad \text{og} \quad \vec{v} = 2 \cdot \vec{u}_1 + 5 \cdot \vec{u}_2$$

Beregn  $\vec{w} = 2 \cdot \vec{u} - \vec{v}$

Beregning vha. koordinatvektorer:  $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -19 \end{pmatrix}$

dvs. linearkombinationen bliver:  $\vec{w} = 4 \cdot \vec{u}_1 - 19 \cdot \vec{u}_2$

#### Øvelse 11

- Lad vektorerne  $u$  og  $v$  være defineret som ovenover. Find så med koordinatvektorer:  $3u$ ,  $0,5v + 4u$  og  $0,5(u+v)$ .

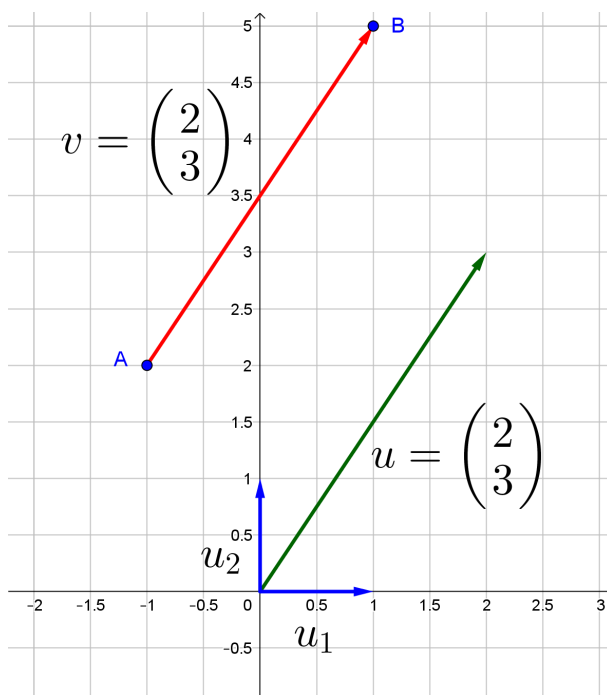
## Vektorer i GeoGebra

Vektorer tegnes på en *tegneblok* med et almindeligt retvinklet *koordinatsystem*. Dvs. et punkt er udnævnt som *origo* (begyndelsespunkt) og de to basisvektorer står vinkelret på hinanden (hvor den anden er drejet en ret vinkel mod uret i forhold til den første.) Vektorerne her har også *længder*; basisvektorerne har begge længden 1.

Vektorerne kan tegnes som vektorer overalt i planen ved at angive begyndelsespunkt og endepunkt. I Algebravinduet vil den blive vist som fx  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , dvs. som koordinatvektor

medens den samme vises på tegneblokken som en geometrisk vektor. Man kan også tegne en vektor med indtastning i inputfeltet: Der indtastes den samme vektor som  $u = (2,3)$ , men nu vil *repræsentanten* blive tegnet som en *stedvektor*, dvs. med begyndelsespunkt i origo. Det er vigtigt, at vektoren som her navngives med et lille bogstav. I modsat fald vil objektet blive opfattet som et punkt.

Bemærk, at den samme vektors repræsentanter alle får forskellige navne.



GeoGebra sjusker altså med præcisionen; forklaringen er, at vi med et resultat fra det ene rum nemt kan oversætte det til et resultat i det andet rum.

### Øvelse 12

- Udfør nedenstående små øvelser. Gæt på, hvad der sker lige før du taster eller klikker. **Husk, hvad der så skete.**
  - I inputfelt indtastes " $a=(1,1)$ "
  - I inputfelt indtastes " $(1,1)$ "
  - I inputfelt indtastes "Tværvektor( $a$ )"
  - Vælg **Punkt** i billedmenuen og klik i koordinatsystemet på  $(4,3)$  og  $(-1,6)$
  - Vælg i 3. billedmenu **Vektor** og klik på de to punkter, du lige har lavet
  - Vælg i 3. billedmenu **Vektor fra punkt** og klik på punktet  $(-1,6)$  og vektor  $a$
  - I inputfeltet indtastes  $(1,0)-a$

### Øvelse 13

- Åbn GeoGebra og luk alle vinduer undtagen tegneblokken. Fjern akser og tern.
- Vælg et punkt som origo ( $O$ ) - og hvis ikke andet nævne tegnes alle vektorer med  $O$  som begyndelsespunkt.
- Tegn to basisvektorer:  $u$  og  $v$ .
- Tegn  $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$  (Obs.: Inputfelt er lukket. Benyt geometri til løsningen.)
- Tegn  $-v$
- Tegn  $\frac{3}{7}u$



## Geometriske vektorer i planen og $\mathbb{R}^2$

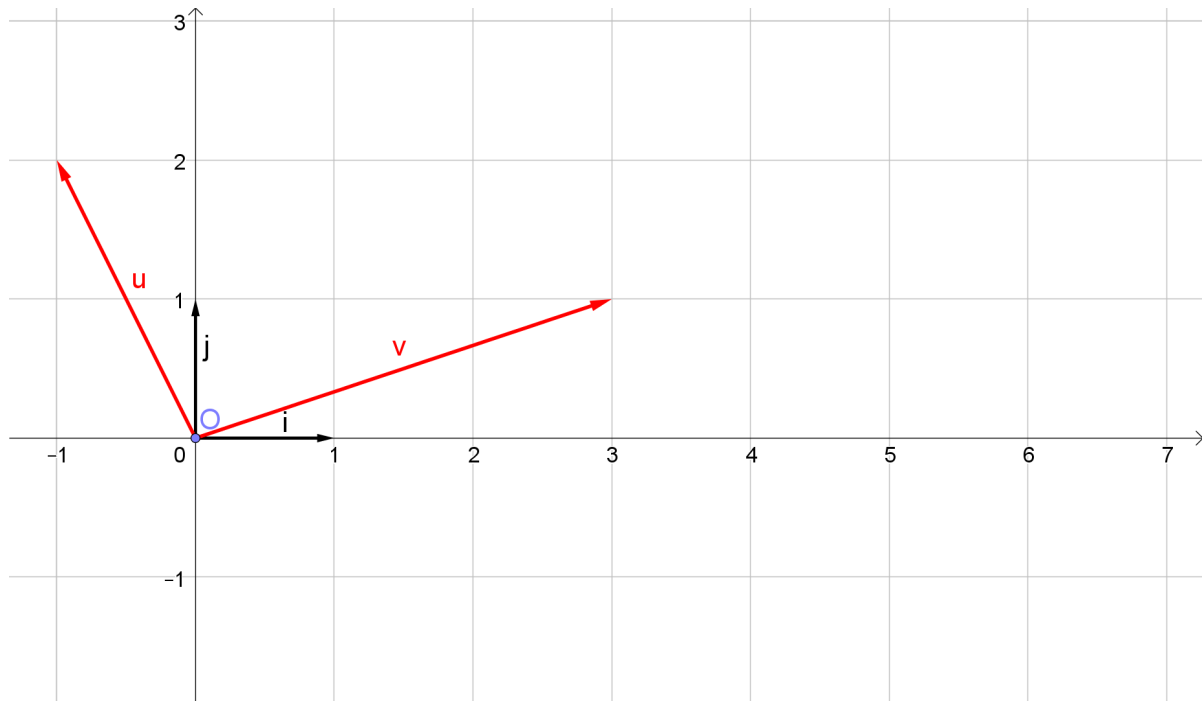
I det følgende forudsættes, at der i planen er et begyndelsespunkt  $O$  (origo) og at vektorrummet  $V$  har en *standardbasis*: en vektor ( $\vec{i}$ ) og dens tværvektor ( $\vec{j}$ ), begge med længden 1 (en).

Desuden indføres en funktion: *prikproduktet*, der for et par vektorer har et reelt tal som funktionsværdi. Med denne kan vi beregne længder af vektorer og vinkler mellem dem.

Selv om det kunne være et ønskemål at al teori alene byggede på "vektorrum", ville det virke både besværligt og indskrænkende med de givne rammer. Derfor bygger det følgende også på sædvanlige geometriske og umiddelbare betragtninger.

Noter, at tallene i koordinatvektoren kaldes vektorens *koordinater*, og nummereres oppefra og ned (eller fra venstre mod højre). Altså 1. koordinat og 2. koordinat.

### Øvelse 14



- Skriv  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  som linearkombinationer af basisvektorerne
- Skriv de tilsvarende koordinatvektorer:  $T(\vec{u})$  og  $T(\vec{v})$ , jævnfør side 13
- Hvad er  $T(\vec{i})$  og  $T(\vec{j})$ ?
- Hvorledes vil vi geometrisk finde linearkombinationen  $\vec{w} = 2\vec{v} - \vec{u}$ ?
- Hvorledes kan du beregne koordinatvektoren  $T(\vec{w})$ ?
- Hvorledes kan du med det lige beregnede finde  $\vec{w}$ ?

### Definition af enhedsvektor

En egentlig vektor med længden en (= 1) kaldes en *enhedsvektor*.

### Øvelse 15

- Vis at vektorerne  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  og  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  udgør en basis i  $\mathbb{R}^2$
- Vis at vektorerne  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  og  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  udgør en basis i  $\mathbb{R}^2$
- Vis at vektorerne  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$  og  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  er lineært afhængige

### Prikprodukt (Definition)

Givet to vektorer  $u$  og  $v$  defineres deres *prikproduktet*:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$

Bemærk, at prikproduktet er en skalar (her et reelt tal.) Bemærk også, at det kan beregnes alene med kendskab til koordinatvektorerne. Vi kunne jo også definere et prikprodukt for disse som:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 \quad \text{og dermed fås:} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = T(\vec{u}) \cdot T(\vec{v})$$

Vi får altså samme resultat lige meget om vi benytter den geometriske vektor eller koordinatvektoren.

### Længden af en vektor

Længden af vektoren  $\vec{u}$  (som skrives  $|\vec{u}|$ ) fås med ligningen  $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} : |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

### Bemærkning

Når vi definerer længden på en ny måde, skal definitionen helst ikke stride mod hidtidige definitioner:

### Bevis

Vektoren  $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}$  og følgelig er den tilsvarende koordinatvektor  $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ .

Hvis begge koordinater er 0, er der tale om nulvektoren, og længden er nul som formlen også angiver.

Hvis vektoren er parallel med en af basisvektorerne som fx  $\vec{i}$ , fås længden som  $|u_1| \cdot |\vec{i}| = \sqrt{u_1^2 + 0^2}$  (hvor de lodrette linjer angiver hhv. numerisk værdi og længde.)

I de andre tilfælde ses det nemt, at formelen svarer til Pythagoras sætning.



## Vinklen mellem 2 vektorer

Vinklen  $\alpha$  mellem 2 vektorer er vinklen i intervallet  $[0; \pi]$ , der er løsning til ligningen

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

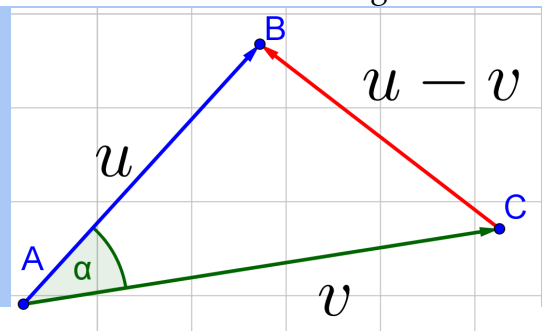
### Bemærkning

Ved sammenligning af definitionen og sætning 6 om prikproduktet ses, at sædvanlige trigonometriske beregninger med cosinusrelationerne giver samme resultat.

## Sætninger om prikproduktet

$a$  er en skalar og  $u$  og  $v$  og  $w$  er vektorer og  $\alpha$  er vinklen mellem vektorerne  $u$  og  $v$ :

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3.  $a(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v})$
4.  $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$
5.  $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
6.  $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2}{2|\vec{u}| |\vec{v}|}$



### Beviser

1. Er en umiddelbar følge af den kommutative regel for produkter i et legeme
2. Er en umiddelbar følge af den distributive regel i et legeme
3. Er en umiddelbar følge af den associative regel i et legeme
4. Er blot en gentagelse af definitionen på længden
5. Af 2. kvadratsætning fås:  $(u_1 - v_1)^2 = u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1$ ; tilsvarende for næste koordinat. Heraf følger sætningen næsten direkte.
6. Er en omskrivning af 5; bemærk, at på højresiden er der kun længder, der ikke afhænger af den valgte basis. Så uafhængigt af basis fås samme prikprodukt.

### Lemma

Hvis vinklen mellem vektorerne er hhv.  $0^\circ$ , spids, ret, stump eller lige følger at prikproduktet af enhedsvektorer er hhv. 1, mellem 0 og 1, 0, mellem -1 og nul eller -1 (og omvendt!)

## Definitioner

Drejes en vektor  $v$  en ret vinkel modsat urets retning, fås en vektor, der kaldes *tværvektoren* til vektor  $v$ . Den skrives som  $\hat{v}$ .

## Flytning ved parallelforskydning

Det kan indses, at forskydes alle punkter af et objekt med vektoren  $v$ , er der tale om en *parallelforskydning*.

### Øvelse 16

- Sæt dit elevbillede (fra Lectio) ind i GeoGebra; nu skal du finde en vektor til at flytte billedet med, så din næsetip er placeret i (0,0).

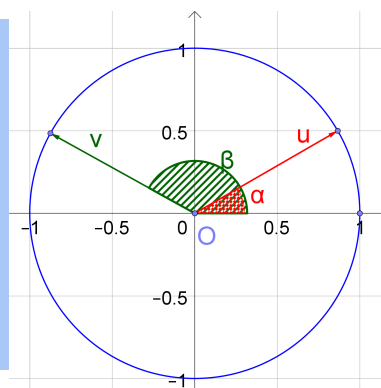
## Additionssætninger

$$1. \quad \cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$2. \quad \cos(\beta + \alpha) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$3. \quad \sin(\beta + \alpha) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$4. \quad \sin(\beta - \alpha) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$



## Bevis

Vektorerne  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  er enhedsvektorer, der er drejet mod uret med vinklerne hhv.  $\alpha$  og  $\beta$ . For at beregne  $\cos(\beta - \alpha)$  benyttes definitionen af "Vinkler mellem 2 vektorer", se side 25. Da vektorernes længde er 1 (en) fås umiddelbart ved indsætning:

$$\cos(\beta - \alpha) = \vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

og heraf følger sætningens 1. del.

De øvrige 3 sætninger fås ved at benytte denne:

$$(2) \quad \cos(\beta + \alpha) = \cos(\beta - (-\alpha)) = \cos(-\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(-\alpha) \cdot \sin(\beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$(3) \quad \sin(\beta + \alpha) = \cos((\pi/2 - \beta) - \alpha) = \cos(\pi/2 - \beta) \cdot \cos(\alpha) + \sin(\pi/2 - \beta) \cdot \sin(\alpha) = \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha)$$

$$(4) \quad \sin(\beta - \alpha) = \cos((\pi/2 - \beta) + \alpha) = \cos(\pi/2 - \beta) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\pi/2 - \beta) \cdot \sin(\alpha) = \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha)$$

### Øvelse 17

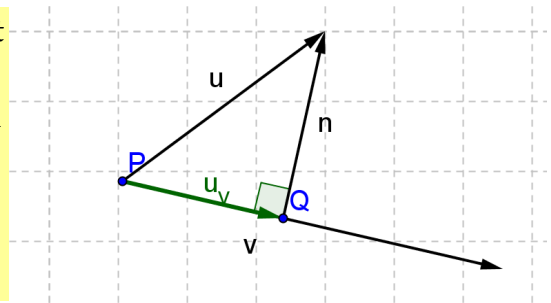
- Vis, at med additionsformlerne kan forskriften for funktionen  $f$ , hvor  
 $f(x) = r \cdot \sin(\omega x) + s \cdot \cos(\omega x)$ , omskrives til funktionsforskriften  
 $f(x) = A \sin(\omega x + \phi)$

### Projektion (Definition)

En repræsentant for projektionen af  $u$  på  $v$  fås ved at tegne de to (egentlige) vektorer med samme begyndelsespunkt  $P$  og nedfælde den vinkelrette fra  $u$ 's endepunkt på en linje gennem  $v$  (til punktet  $Q$ ).

Projektionen er  $\vec{u}_v = \overrightarrow{PQ}$

(Vektorerne  $v$  og  $n$  siges at være *ortogonale*).



### Øvelse 18

- Overvej: Fås den samme projektionsvektor ved alle valg af  $P$ ? Hvorfor?

### Projektion (Sætning)

For ovennævnte vektorer gælder:  $\vec{u}_v = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$  og  $|\vec{u}_v| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

### Bevis

Da (1)  $\vec{u} = \vec{u}_v + \vec{n}$  og (2)  $\vec{u}_v = \alpha \cdot \vec{v}$  fås ved indsætning af (2) i (1)

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \alpha \vec{v} + \vec{n} \Rightarrow \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= (\alpha \vec{v} + \vec{n}) \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \alpha \vec{v} \cdot \vec{v} + 0 \Leftrightarrow \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \alpha |\vec{v}|^2 \Leftrightarrow \\ \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} &= \alpha \end{aligned}$$

$\alpha$  indsættes i (2):

$$(3) \quad \vec{u}_v = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$$

Heraf følger umiddelbart

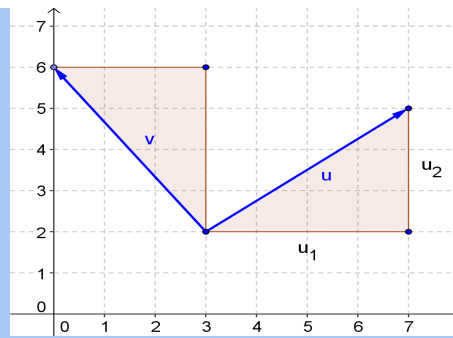
$$(4) \quad |\vec{u}_v| = \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v} \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|^2} \cdot |\vec{v}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

### Øvelse 19

- Tilføj i ovenstående bevis ALLE sætninger, der er benyttet (ordlyd og reference)

### Sætning om tværvektor

Lad  $\vec{u}$  være en geometrisk vektor og  $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  den heril svarende koordinatvektor. Lad  $\vec{v} = \hat{\vec{u}}$  være den hertil svarende tværvektor: Så bliver koordinatvektoren for tværvektoren  $\begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$  (Huskeregul: Minus den sidste, komma den første.)



### Øvelse 20

- Bevis sætningen

### Matrix definition

Ved en matrix forstås et rektangulært ordnet sæt

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{hvor matrixens elementer i denne sammenhæng er reelle tal.}$$

Det ses let, at matrixen består af n m-dimensionale søjlevektorer (eller m rækkevektorer.).

For kvadratiske matrixer (hvor  $n=m$ ), kan vi definere matrixens determinant; her defineres den kun i det specielle tilfælde, hvor  $n=2$ .

### Definition af Determinant (n=2)

$$\text{Lad } M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = m_{11} \cdot m_{22} - m_{21} \cdot m_{12}$$

## Determinant-sætning

Lad  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  være to søjlevektorer og  $M$  den tilsvarende matrix; så kan  $\det(M)$  beregnes som:

$$\det(M) = \hat{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$$

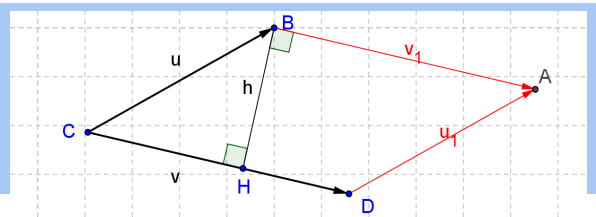
### Øvelse 21

- Bevis sætningen

## Arealsætninger

Et parallelogram (som ABCD) udspændt af vektorerne  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  har et areal  $P$ , hvor

$$P = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right| = |u_1 v_2 - u_2 v_1| = |\hat{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}| = |\vec{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}|$$



## Bevis

Benytter vi os af sætninger kendt fra geometrien, er arealet produktet af længderne af  $\mathbf{v}$  og  $h$ . Længden af  $h$  fås som længden af projektionen af  $\mathbf{u}$  på tværvektoren til  $\mathbf{v}$ .

$$|\vec{\mathbf{v}}| \cdot |\vec{\mathbf{u}}_{\vec{\mathbf{v}}}^\perp| = |\vec{\mathbf{v}}| \frac{|\vec{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}^\perp|}{|\hat{\mathbf{v}}^\perp|} = |\vec{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}^\perp| = |-\hat{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}| = |\hat{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}|$$

## Lemma

Kaldes vinklen mellem vektorerne  $\alpha$ , kan  $h$  beregnes som:

$$h = |\vec{\mathbf{u}}| \cdot \sin(\alpha) \quad \text{hvoraf ses, at}$$

$$P = |\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{v}}| \cdot \sin(\alpha)$$

## Lemma

Arealet af trekanten udspændt af vektorerne  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  (som CBD) har et areal  $T$ , hvor

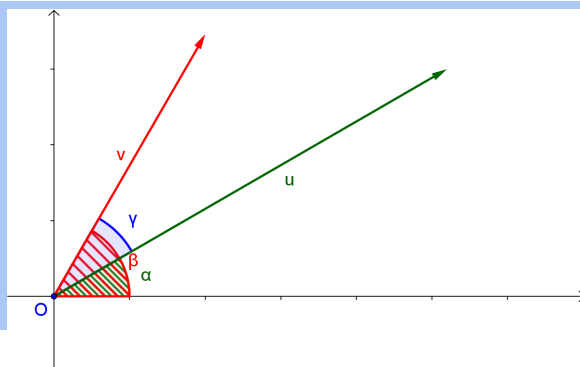
$$T = \frac{|\hat{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}|}{2} = \frac{|\vec{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}|}{2}$$

## Beregning af $\det(u, v)$

Lad der være givet 2 vektorer  $u$  og  $v$  med længderne  $a$  hhv.  $b$ . Vinklerne mellem x-aksen og vektorerne (målt i den positive omløbsretning, dvs. mod uret) er hhv.  $\alpha$  og  $\beta$ ; vinklen mellem vektorerne er  $\gamma = \beta - \alpha$ .

Så gælder:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\gamma)$$



## Bevis

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a \cos(\alpha) & b \cos(\beta) \\ a \sin(\alpha) & b \sin(\beta) \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = a \cos(\alpha) b \sin(\beta) - a \sin(\alpha) b \cos(\beta) \Leftrightarrow$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = a b (\cos(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\alpha) \cos(\beta)) \Leftrightarrow$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = a b \sin(\beta - \alpha) = a b \sin(\gamma)$$

## Lemma

Når  $\gamma$  er vinklen mellem to (egentlige) vektorer  $u$  og  $v$ , er

$$\sin(\gamma) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

## Lemma

Når determinanten er positiv, er  $0 < \gamma < \pi$ , når determinanten er negativ, er  $\pi < \gamma < 2 \cdot \pi$ , og når determinanten er nul, er vektorerne parallelle og omvendt.

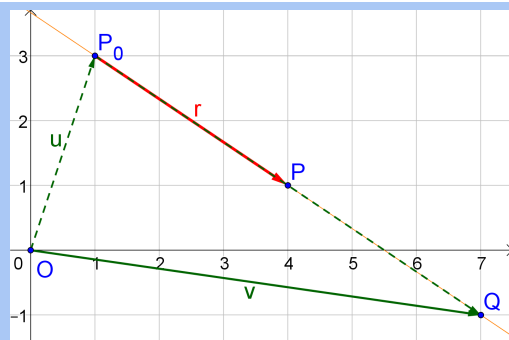
## Linjens parameterfremstilling

Lad der være givet en linje gennem 2 punkter:  $P_0$  og  $P$ .

Så kan stedvektoren til et vilkårligt punkt på linjen skrives som  $\vec{OQ} = \vec{OP}_0 + t \cdot \vec{P}_0P$ , og hvis stedvektoren kan skrives sådan, er punktet et punkt på linjen.

Benyttes koordinatvektorer er

parameterfremstillingen: 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$



Vektoren  $\vec{r} = \overrightarrow{P_0P}$  kaldes en *retningsvektor*,  $t$  er en skalar. Begrænses  $t$  til et interval fås fremstillingen for et linjestykke.

## Bevis

Antag, at  $Q$  ligger på linjen. Er  $Q = P_0$  er fremstillingen rigtig ( $t=0$ ). Er  $Q \neq P_0$  er  $\vec{r}$  og  $\overrightarrow{P_0Q}$  parallelle og derfor er  $\overrightarrow{P_0Q} = t \cdot \vec{r}$ .  $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0Q} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{r}$ .

Antag, at parameterfremstillingen gælder, men  $Q$  ligger ikke på linjen. Så er  $\overrightarrow{P_0Q} = t \cdot \vec{r}$ , selvom  $\vec{r} = \overrightarrow{P_0P}$  og  $\overrightarrow{P_0Q}$  ikke er parallelle. Det er ikke muligt, så  $Q$  må ligge på linjen.

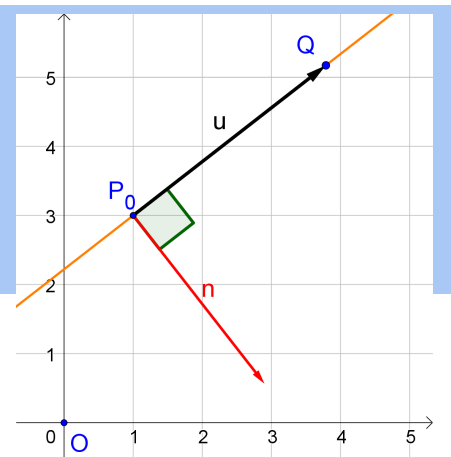
## Linjens ligning

Lad der være givet en linje gennem et punkt:  $P_0$  og vektoren  $\vec{n}$  (som står vinkelret på linjen; den kaldes en normalvektor).

Linjens ligning er så:  $ax + by + c = 0$ ,

hvor  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,  $c = (-ax_0 - by_0)$  og  $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Linjens ligning betyder: Har vi et punkt i planen og og dets koordinater gør ligningen sand, er dette et punkt på linjen. Og har vi et punkt på linjen vil ligningen være sand, når punktets koordinater indsættes.



## Bevis

Lad  $\mathbf{n}$  være tværvektoren til retningsvektoren og lad  $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ . Punktet  $Q$  ligger så på

linjen hvis og kun hvis enten  $Q = P_0$  eller  $\mathbf{n}$  og  $\mathbf{u}$  er *ortogonale* (dvs. står vinkelret på hinanden). Men det er ensbetydende med, at  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ . (Se side 25) Indsættes vektorernes koordinater fås:

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) &= 0 \Leftrightarrow \\ ax + by + (-ax_0 - by_0) &= 0 \Leftrightarrow \\ ax + by + c &= 0 \end{aligned}$$

hvilket viser, at ligningen er opfyldt hvis og kun hvis vektorerne er ortogonale, dvs. hvis og kun hvis  $Q$  ligger på linjen.

### Øvelse 22

- Overvej: er  $c$  som defineret ovenfor afhængig af  $P_0$ ?

### Øvelse 23

- Lad en linje være bestemt af ligningen  $ax + by + c = 0$ . Vis, at  $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  er en tværvektor til en vilkårlig retningsvektor.
- Hint: Lad  $P$  og  $Q$  være punkter på linjen; beregn hermed en retningsvektor.

### Produktet af to hældningskoefficienter (Sætning)

Lad der være givet 2 linjer, der begge har en hældningskoefficient. Så står de vinkelret på hinanden hvis og kun hvis *produktet af hældningskoefficienterne* er -1.

### Bevis

Lad linjens ligning være skrevet som:  $ax + by + c = 0$ . Det ses, at hældningskoefficienten i så fald er  $-\frac{a}{b}$ . Desuden gælder, at  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  er en vektor, der står vinkelret på linjen (dvs. en normalvektor.)

Linjer står vinkelret på hinanden hvis og kun hvis normalvektorerne står vinkelret på hinanden og det er tilfældet hvis og kun hvis disses prikprodukt er 0. Benyttes fodtegnene 1 og 2 for de to linjer fås altså:

*Linjerne står vinkelret på hinanden*  $\Leftrightarrow$

$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0 \Leftrightarrow b_1 \cdot b_2 = -a_1 \cdot a_2 \Leftrightarrow$$

$$1 = \frac{-a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2} \Leftrightarrow$$

$$-1 = \left( -\frac{a_1}{b_1} \right) \cdot \left( -\frac{a_2}{b_2} \right)$$

### Afstande

Afstanden mellem to punkter A og B er længden af  $\overrightarrow{AB}$

### Mellem 2 punkter

Afstanden  $d$  mellem A og B er:  $d = \sqrt{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AB}|}$

Bevis: Se Længden af en vektor side 24.



## Mellem punkt $Q$ og linje $l$

Afstanden mellem  $Q(x_0, y_0)$  og  $l$  (med ligningen  $ax + by + c = 0$ ) kaldes  $\text{dist}(Q, l)$  og er:

$$\text{dist}(Q, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

### Bevis

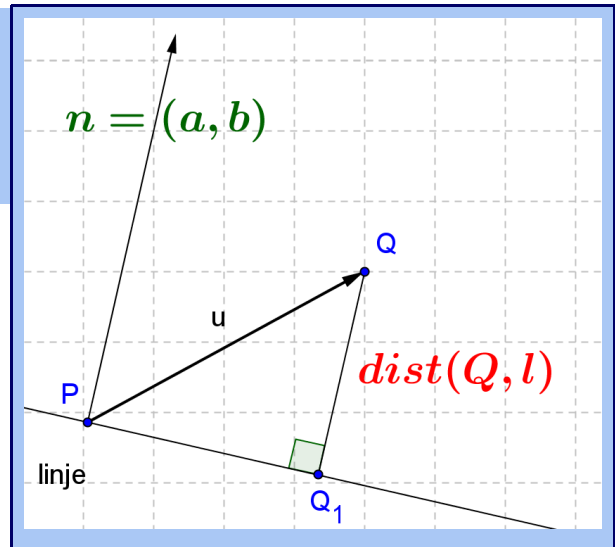
I en tidligere øvelse så vi, at defineres  $\mathbf{n}$  som

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , er vektor og linje ortogonale. Derfor

er den søgte afstand lig med længden af

projektionen af  $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$  på  $\mathbf{n}$ , hvor  $P$  er

et vilkårligt punkt på linjen;  $P = (x_0, y_0)$ ,  $Q = (x_1, y_1)$ .



$$\begin{aligned} \text{dist}(Q, l) &= \frac{|\vec{n} \cdot \vec{PQ}|}{|\vec{n}|} \Leftrightarrow \\ \text{dist}(Q, l) &= \frac{|(a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0))|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \\ \text{dist}(Q, l) &= \frac{|(ax_1 + by_1 + c) - (ax_0 + by_0 + c)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \\ \text{dist}(Q, l) &= \frac{|(ax_1 + by_1 + c) - 0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \\ \text{dist}(Q, l) &= \frac{|(ax_1 + by_1 + c)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Nu benyttes sætningen om længden af en projektion.:

Næste ligning følger af beregning af prikproduktet.

Dette opdeles i de to parenteser; samtidigt er der adderet og subtraheret  $c$ .

Sidste parentes i tælleren er nul, da  $P$  er et punkt på linjen.

## Cirkels ligning

Lad der være givet en cirkel  $c$  med centrum  $O = (a, b)$  og radius  $r$ . Et vilkårligt punkt  $P$  på cirkelperiferien har koordinaterne  $(x, y)$ . Cirklen har så ligningen:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

### Bevis

Da en cirkel er det geometriske sted for alle punkter med en given afstand til et bestemt punkt (centrum), følger sætningen umiddelbart af sætningen om afstanden mellem 2 punkter.

## Bemærkning

Sommetider mødes *cirkels ligning* i en anden form; denne kan omskrives som vist herunder i et eksempel:

$$\begin{aligned}x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 &= 0 \Leftrightarrow \\(x+2)^2 - 2^2 + (y-3)^2 - 3^2 - 12 &= 0 \Leftrightarrow \\(x-(-2))^2 + (y-3)^2 &= 5^2 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

Heraf ses, at cirklen i eksemplet har centrum i  $(-2,3)$  og har radius 5.

### Øvelse 24

- Undersøg, om linjen  $t$  ( $y=8-x$ ) er tangent til cirklen  $c$  ( $x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$ )

### Øvelse 25

- Idet  $c$  er cirklen med centrum i  $O$  og med ligningen
  - ( $x^2 - 12x + y^2 - 18y + 92 = 0$ ) og
  - $P = (10,6)$ ,
- skal du finde ligningen for alle de cirkler, der har linjen gennem  $O$  og  $P$  som tangent, og hvor  $P$  er et punkt på disses periferi.

## Determinantmetoden

### 2 ligninger med 2 ubekendte

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  er et ligningssystem svarende til:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2$$

har løsningen  $x = \frac{\hat{c} \cdot \vec{b}}{\hat{a} \cdot \vec{b}}$  og  $y = \frac{\hat{a} \cdot \vec{c}}{\hat{a} \cdot \vec{b}}$  forudsat nævneren ikke er nul.

Er det tilfældet er ligningerne ligninger for parallelle linjer, og der kan være en tom løsningsmængde eller uendelig mange løsninger. (Bemærk, at tællere og nævnere i løsningen er determinanter; deraf navnet.)

## Bevis

Når nævneren ikke er nul, skærer de til ligningerne svarende linjer hinanden: dvs. at der er præcis en løsning. Ved at indsætte den postulerede løsning i ligningen (at gøre prøve), kan det ses, at ligningen er sand, hvormed sætningen er bevist. (Nemt hvis man er omhyggelig, men besværligt.)

## Eksempel

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{svarende til ligningerne} \quad \begin{array}{l} 2x - 4y = 2 \\ -x + 3y = 1 \end{array}$$

De tre determinanter beregnes:

$$d_x = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 10$$

$$d_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2$$

Løsningen er så:

$$x = \frac{d_x}{d} = \frac{10}{2} = 5$$

$$y = \frac{d_y}{d} = \frac{4}{2} = 2$$

## Find linjers skæringspunkter

- Er linjerne givet med linjens ligning: benyt metoden ovenfor.
- Er linjerne givet med parameterfremstilling benyttes.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \alpha \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -s_1 \\ -s_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} r_1 & -s_1 \\ r_2 & -s_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Benyt så  $\alpha$  eller  $\beta$  til at finde skæringspunktet ved indsættelse i parameterfremstillingen.
- Er linjerne givet med en ligning og en parameterfremstilling indsættes den sidste i den første.



# Stikordsregister

|                                           |        |
|-------------------------------------------|--------|
| 2 ligninger med 2 ubekendte.....          | 34     |
| Additionssætninger.....                   | 26     |
| Afstand mellem punkt Q og linje .....     | 33     |
| Afstande.....                             | 32     |
| Afstande, mellem 2 punkter.....           | 32     |
| Afstande, mellem punkt Q og linje l.....  | 33     |
| Arealsætninger.....                       | 29     |
| Arealsætninger, parallelogram.....        | 29     |
| Arealsætninger, trekanten.....            | 29     |
| basis.....                                | 11     |
| bijektion.....                            | 13     |
| Cirklens ligning.....                     | 33     |
| cirklens ligning, omskrivning.....        | 34     |
| Definition af Determinant.....            | 28     |
| Determinantmetoden.....                   | 34     |
| Dimensionsdefinitionen.....               | 12     |
| Dimensionssætningen.....                  | 12     |
| dividerer.....                            | 6      |
| egentlig vektor.....                      | 15     |
| enhedsvektor.....                         | 23     |
| Entydighedssætningen.....                 | 11     |
| geometrisk vektor.....                    | 15     |
| injektiv.....                             | 13     |
| isomorfe vektorrum.....                   | 13     |
| koordinater.....                          | 23     |
| koordinatsystem.....                      | 20     |
| koordinatvektorrum.....                   | 12     |
| legeme.....                               | 5      |
| linearkombination.....                    | 9      |
| lineært afhængige.....                    | 9      |
| lineært uafhængige.....                   | 9      |
| Linjens ligning.....                      | 31     |
| Linjens parameterfremstilling.....        | 30     |
| linjers skæringspunkter.....              | 35     |
| Længden af en vektor.....                 | 24     |
| længder.....                              | 15, 20 |
| Matrix definition.....                    | 28     |
| modsatte vektor.....                      | 16     |
| multiplikation af vektor med skalar ..... | 8      |
| nulvektoren.....                          | 15     |
| origo.....                                | 20     |
| ortogonale.....                           | 27, 31 |

|                                            |       |
|--------------------------------------------|-------|
| parallelforskydning.....                   | 26    |
| positive omløbsretning.....                | 30    |
| prikproduktet.....                         | 23ff. |
| Produktet (af skalar og vektor).....       | 15    |
| produktet af hældningskoefficienterne..... | 32    |
| Projektion (Definition).....               | 27    |
| repræsentant.....                          | 15    |
| repræsentanten.....                        | 20    |
| retning.....                               | 15    |
| retningsvektor.....                        | 31    |
| skalar .....                               | 8     |
| skæringspunkter, linjers .....             | 35    |
| span.....                                  | 11    |
| standardbasis.....                         | 23    |
| stedvektor.....                            | 20    |
| subtraherer.....                           | 6     |
| subtraktion (af vektorer).....             | 8     |
| Summen af vektorerne.....                  | 15    |
| surjektiv.....                             | 13    |
| tegneblok.....                             | 20    |
| tværvektoren.....                          | 26    |
| udspændingen.....                          | 11    |
| vektoraddition.....                        | 8     |
| vektorrum.....                             | 8     |
| Vinklen mellem 2 vektorer.....             | 25    |



