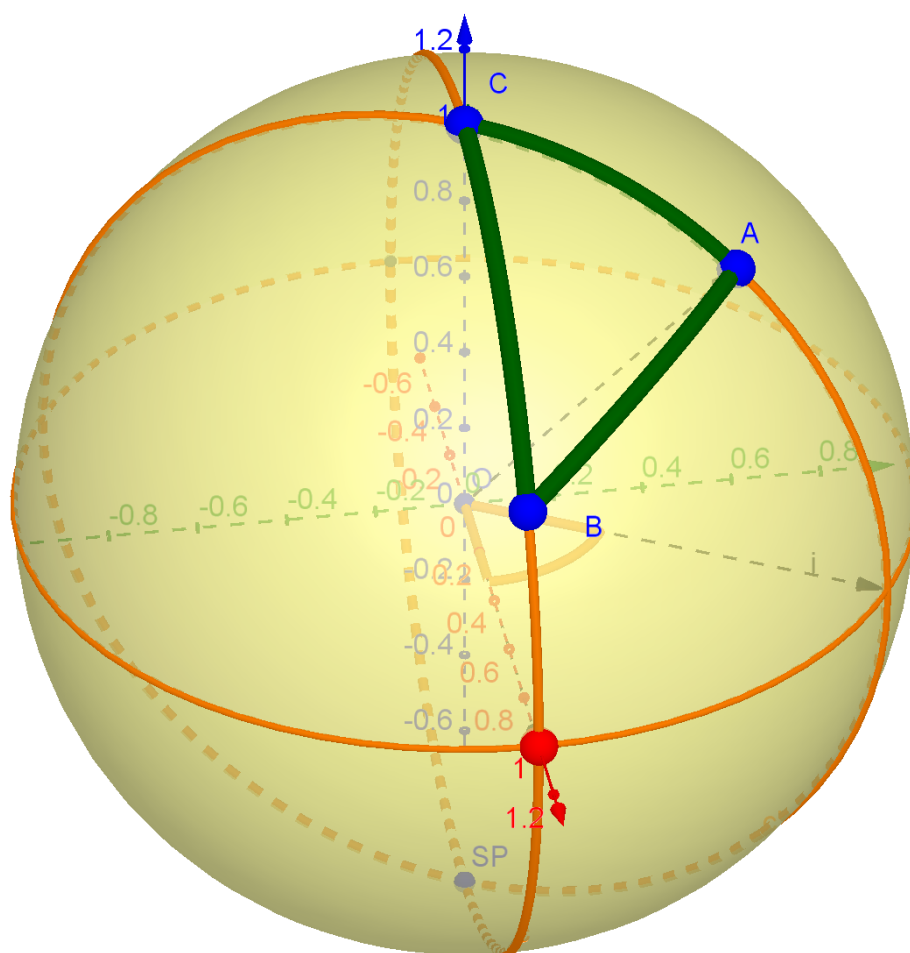


Sfærisk Geometri



Ikast 2018

Ib Michelsen

Ib Michelsen

Matematik A: Sfærisk Geometri

Sidst ændret: 25-11-2018

Udskrevet:

W:\MATAA\Kladder\SG0.odt

12 sider

Indholdsfortegnelse

Indledning.....	4
Kuglens ligning.....	4
Definition af cirkler på kuglen.....	4
Definition af en sfærisk tokant hhv. trekant.....	4
Cosinusrelationerne.....	5
Sætning.....	5
Sinusrelationerne.....	6
Sætning.....	6
Polartrekanten.....	7
Poler.....	7
Polartrekant.....	7
Sætning om siderne i polartrekanten.....	8
Storcirkel gennem poler.....	9
Polsætning.....	9
Polartrekantens polartrekant.....	9
Noget om vinkler.....	10
Ekstra cosinusrelationer.....	10
Øvelser.....	12

Indledning

Sfærisk geometri handler om geometri på en kugleflade, dvs. mængden af de punkter, der tilfredsstiller kuglens ligning.

Kuglens ligning

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \quad (1)$$

hvor (x,y,z) er et vilkårligt punkt på kuglefladen, (a,b,c) er kuglens centrum og r er kuglens radius.

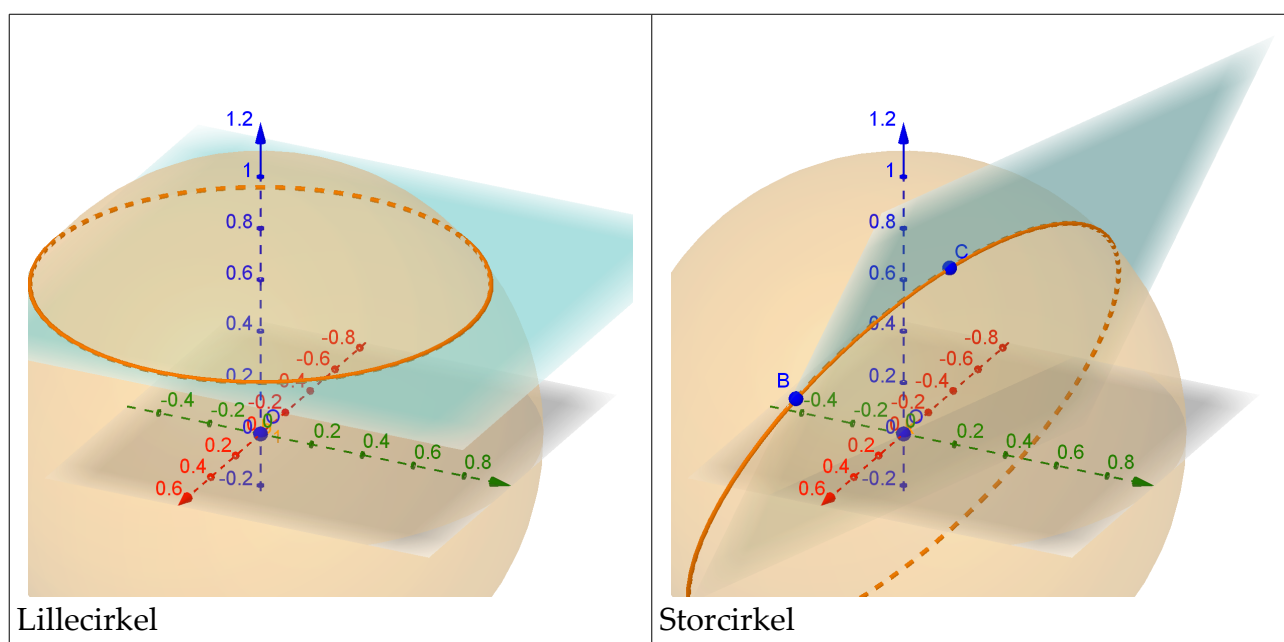
I det følgende vil vi arbejde med en *enhedskugle*, dvs. $r = 1$ og $(0,0,0)$ vælges som (a,b,c) .

Definition af cirkler på kuglen

En *lillecirkel* er skæringen mellem kuglefladen og en plan.

En *storcirkel* er skæringen mellem kuglefladen og en plan gennem centrum.

En *storcirkelbue* er en del af storcirklen beliggende mellem 2 punkter på denne.



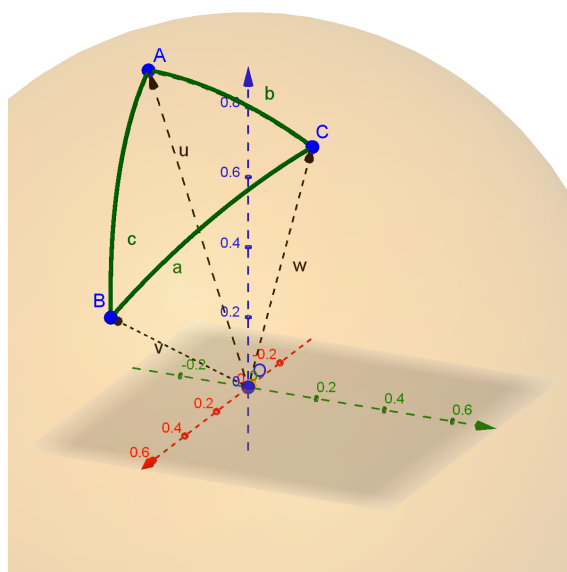
Definition af en sfærisk tokant hhv. trekant

En sfærisk tokant er en del af kuglefladen begrænset af 2 storcirkelbuer (tokantens sider), en sfærisk trekant er en del af kuglefladen begrænset af 3 storcirkelbuer. Endepunkter for den begrænsende del af storcirkelbuerne er tokantens eller trekantens hjørner eller vinkelspidser.

Som i den euklidiske geometri betegnes hjørner med store bogstaver ($A, B, C \dots$) og de modstående sider med de tilsvarende små bogstaver $a, b, c \dots$

Både vinkler (som A) og sider (som a) måles i grader eller radianer. Ønsker vi at finde længden på en side er den identisk med radianmålet, når der er tale om enhedskuglen. Ellers er længden lig med produktet af radianmålet og radius.

Bemærk, at siden a har samme størrelse som vinklen mellem vektorerne v og w (dvs. vektorerne fra kuglens centrum til endepunkterne for siden a). Vinklerne i trekantens hjørner er for fx A vinklen mellem planerne gennem origo og siderne b og c .



Cosinusrelationerne

Da vinklerne ikke ændres ved at koordinatsystemet roteres, kan vi rotere det, så $A = (0,0,1)$ og B ligger i xz -planen, når der er tale om en enhedskugle.

Sætning

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \sin b}$$

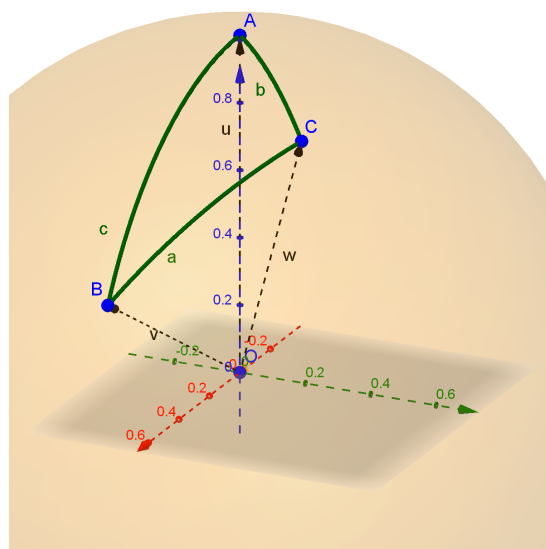
$$\cos c = \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C + \cos a \cdot \cos b \quad (2)$$

Bevis

v danner vinklen $\pi/2 - c$ med x -aksen; derfor bliver

- førstekoordinat: $\cos(\pi/2 - c) = \sin c$
- andenkoordinat: 0
- tredjekoordinat: $\sin(\pi/2 - c) = \cos c$

$$v = \begin{pmatrix} \sin c \\ 0 \\ \cos c \end{pmatrix}$$



w danner vinklen $\pi/2 - b$ med xy -planen, men er også roteret A fra xz -planen; derfor bliver

$$w = \begin{pmatrix} \sin b \cdot \cos A \\ \sin b \cdot \sin A \\ \cos b \end{pmatrix}$$

Vinklen mellem de to vektorer er a ; derfor er

$$\cos a = v \cdot w = \begin{pmatrix} \sin c \\ 0 \\ \cos c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin b \cdot \cos A \\ \sin b \cdot \sin A \\ \cos b \end{pmatrix} = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A + 0 + \cos c \cdot \cos b \Leftrightarrow$$

$$\cos a = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A + \cos b \cdot \cos c$$

Tilsvarende resultater fås for b og c :

$$\begin{aligned} \cos a &= \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A + \cos b \cdot \cos c \\ \cos b &= \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B + \cos a \cdot \cos c \\ \cos c &= \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C + \cos a \cdot \cos b \end{aligned} \quad (3)$$

Ligesom i planen kan vi isolere fx. $\cos A$, og vi får:

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c} \\ \cos C &= \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} \end{aligned} \quad (4)$$

Sinusrelationerne

Sætning

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad (5)$$

Bevis

Vi benytter Pythagoras sætning og cosinurelationerne:

$$\begin{aligned}
\sin^2 A &= 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \right)^2 \Leftrightarrow \\
\sin^2 A &= \frac{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c} - \frac{\cos^2 a + \cos^2 b \cdot \cos^2 c - 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c} \Leftrightarrow \\
\sin^2 A &= \frac{(1 - \cos^2 b) \cdot (1 - \cos^2 c) - \cos^2 a - \cos^2 b \cdot \cos^2 c + 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c} \Leftrightarrow \\
\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} &= \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b \cdot \sin^2 c} \Leftrightarrow \\
\frac{\sin A}{\sin a} &= \frac{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c)^{0.5}}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin c}
\end{aligned} \tag{6}$$

Bemærk, at $\sin A > 0 \wedge \sin a > 0$. Det ses nemt, at højresiderne ikke afhænger af, hvilket par af vinkel og side der beregnes på venstre side. Heraf følger sinusrelationerne umiddelbart.

Polartrekanten

Poler

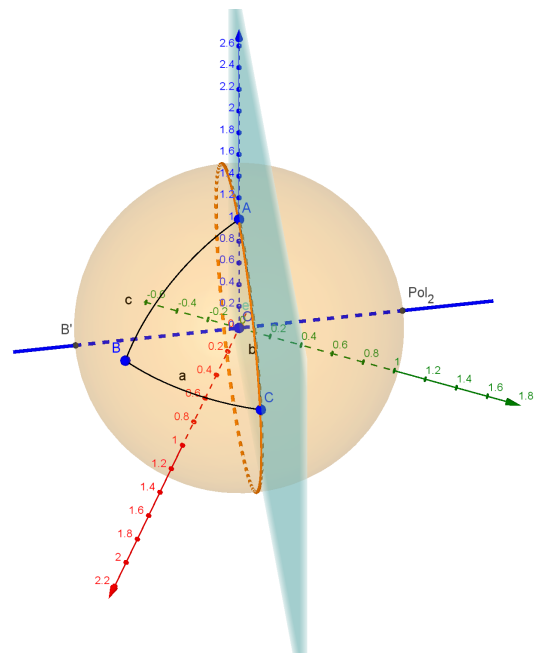
Skæringspunkterne mellem en kugle og en linje gennem kuglens centrum vinkelret på en storcirkels plan kaldes storcirkelns poler.

Et eksempel er jorden som kugle, ækvator som storcirkel og Nordpol og Sydpol som poler.

Polartrekant

For en given sfærisk trekant ABC findes polerne for hver af de begrænsende storcirkler. For storcirklen, hvor a er en del, vælges den pol, der ligger på samme halvkugle som A . Polen kaldes A' . Tilsvarende for de to andre sider. Trekanten $A'B'C'$ er polartrekanten.

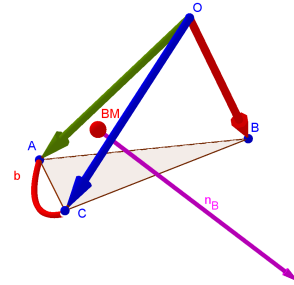
På figuren ses den storcirkel, b er en del af, planen gennem storcirklen og den blå linje vinkelret på denne plan. Polerne er så hhv. B' og Pol_2 . Kuglen deles i halvkugler af omtalte plan og det ses, at B' er valgt blandt polerne, så B og B' ligger på samme



halvkugle.

Hvordan vælges den rigtige pol?

På tegningen til højre ses enhedskuglens centrum O og den sfæriske trekants vinkelspidser. Disse er også vinkelspidser i den viste plane trekant. Bemærk den viste side i den sfæriske trekant b som ligger i storcirkelplanen bestemt af A og C . Bemærk også, at pyramidesiden AOC ligger i samme plan.



Hvis vi vil finde retningen til B' ses, at vi skal vælge en indadgående vektor. Så kommer B og B' til at ligge på samme side af storcirkelens plan (dvs. i samme halvrum.) Her er vist en repræsentant for normalvektoren med begyndelsespunkt midt på pyramidefladen; for at finde B' benyttes denne retning startende i O .

Med højrehåndsreglen ses, at $\vec{n}_B$ beregnes som:

$$\vec{n}_B = \vec{OC} \times \vec{OA} \quad (7)$$

Tilsvarende fås $\vec{n}_A = \vec{OB} \times \vec{OC}$. Vinklen mellem $\vec{n}_A$ og $\vec{n}_B$ er siden $c' = A'B'$ i polartrekanten $A'B'C'$.

Sætning om siderne i polartrekanten

$$\begin{aligned} a' &= \pi - A \\ b' &= \pi - B \\ c' &= \pi - C \end{aligned}$$

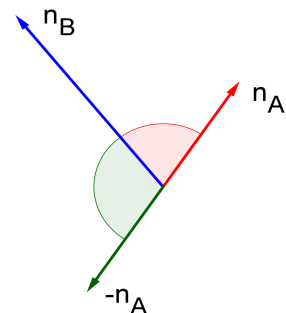
(8)

Dvs. at siderne i polartrekanten er supplementvinkler til de tilsvarende vinklerne i den oprindelige trekant.

Bevis

Vinkler i den oprindelige trekant kan findes som vinkler mellem storcirklerne planer eller disses normalvektorer. For at finde vinklen "inde i pyramiden ($OABC$)" skal den ene vektor være indadgående og den anden udadgående.

Det betyder, at vinklen C beregnes som vinklen mellem $-\vec{n}_A$ og $\vec{n}_B$, og derfor bliver den supplementvinkel til c' . Samme argument gælder for



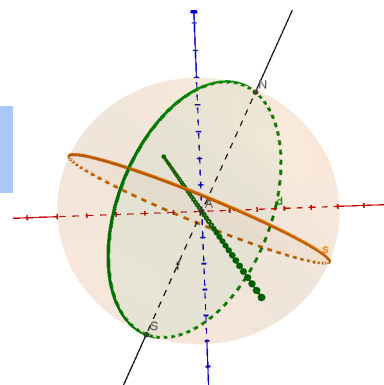
trekantens 2 andre vinkler.

Storcirkel gennem poler

Har en storcirkel s polerne N og S vil enhver storcirkel gennem N og S have en plan vinkelret på planen for s .

Bevis

Planernes normalvektorer er ortogonale.



Polsætning

Givet 2 punkter A og B (som ikke ligger på samme diagonal) samt et tredje punkt P på enhedskuglens overflade, hvor cirkelbuerne har størrelsen $\pi/2$, medfører, at P er en pol for storcirklen gennem A og B .

Bevis

Lad O være kuglens centrum. Af forudsætningen følger, at vektorerne $\vec{OA}$ og $\vec{OB}$ er lineært uafhængige. Da $\vec{OP}$ er ortogonal med begge, følger at $\vec{OP}$ er en normal til planen udspændt af disse. Derfor er P en pol til storcirklen gennem A og B .

Polartrekantens polartrekant

Polartrekantens polartrekant er den oprindelige trekant.

Bevis

Kald den primære trekant ABC og polartrekanten $A'B'C'$. Da B' er pol for storcirklen gennem A og C , har cirkelbuen fra A til B' på storcirklen størrelsen $\pi/2$.

Tilsvarende gælder for C' , at cirkelbuen fra A til C' på storcirklen har størrelsen $\pi/2$. Men ifølge Polsætningen ovenover bliver A så en pol for storcirklen gennem $B'C'$.

Da A' er en pol for storcirklen BC og A og A' er på samme side af storcirklen, er buelængden mellem punkterne mindre end $\pi/2$.

Da A er pol for storcirklen $B'C'$ og afstanden mellem punkterne er mindre end $\pi/2$, ligger punkterne også på samme side i forhold til denne storcirkel.

Det medfører, at A er et hjørne på polartrekanten til trekant $A'B'C'$.

Fuldstændigt tilsvarende gælder for B og C .

Noget om vinkler

På side 5 bemærkede vi, at siden a havde samme vinkelstørrelse som vinklen mellem de to vektorer eller vinklen BOC . Ser vi på pyramiden med spidsen O og grundfladen ABC fås med anvendelse af Euklid XI.21, at

$$a+b+c < 2\pi^1$$

Tilsvarende gælder også for polartrekanten:

$$a'+b'+c' < 2\pi$$

Det kan vi omskrive med anvendelse af (8) side 8:

$$\begin{aligned} a' + b' + c' < 2\pi &\Leftrightarrow \\ \pi - A + \pi - B + \pi - C < 2\pi &\Leftrightarrow \\ \pi < A + B + C \end{aligned} \quad (9)$$

Da hver af vinklerne er mindre end π , fås dobbeltuligheden:

$$\pi < A + B + C < 3\pi \quad (10)$$

Ekstra cosinusrelationer

Fra formel (3) har vi følgende 3 ligninger, som kan omskrives ved hjælp af (8)

$$\cos a = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A + \cos b \cdot \cos c$$

$$\cos b = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B + \cos a \cdot \cos c$$

$$\cos c = \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C + \cos a \cdot \cos b$$

$$\cos a = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A + \cos b \cdot \cos c \Leftrightarrow$$

$$\cos(\pi - A) = \sin(\pi - B) \cdot \sin(\pi - C) \cdot \cos(\pi - a) + \cos(\pi - B) \cdot \cos(\pi - C) \Leftrightarrow \quad (11)$$

$$-\cos(A) = \sin(B) \cdot \sin(C) \cdot (-\cos(a)) + (-\cos(B)) \cdot (-\cos(C)) \Leftrightarrow$$

$$\cos(A) = \sin(B) \cdot \sin(C) \cdot \cos(a) - \cos(B) \cdot \cos(C)$$

Omskrivninger af alle 3 bliver til:

¹ Kilde: <https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookXI/propXI21.html>

$$\cos(A) = \sin(B) \cdot \sin(C) \cdot \cos(a) - \cos(B) \cdot \cos(C)$$

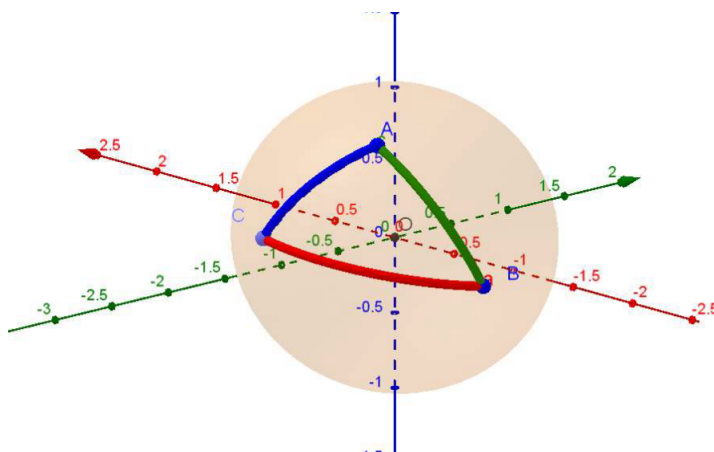
$$\cos(B) = \sin(A) \cdot \sin(C) \cdot \cos(b) - \cos(A) \cdot \cos(C)$$

$$\cos(C) = \sin(A) \cdot \sin(B) \cdot \cos(c) - \cos(A) \cdot \cos(B)$$

(12)

Øvelser

1. Undersøg de forskellige trekantstilfælde med 0, 1, 2 eller 3 kendte sider og hhv. 3, 2, 1 (evt. 2) og kendte sider.
 1. Præciser med tegning hvert tilfælde og undersøg, hvilke sætninger der kan benyttes for at finde de manglende størrelser.
 2. I hvilke tilfælde er det nødvendigt at benytte den inverse sinusfunktion? Hvorfor er det et problem at benytte den?
2. Napoli ligger 41°N , 14°Ø og New York ligger 41°N , 74°V . Antag, at Jorden er en kugle med radius 6370 km.
 1. Hvor lang bliver en flyvetur mellem de to byer, hvis man flyver direkte langs den 41. breddegrad?
 2. Findes der en kortere rute og i givet fald: hvor lang er den? ²
3. Regneopgave med 4 kendte størrelser



Find c og C , idet $A=103,09^\circ$, $B=54,73^\circ$, $a=87,26^\circ$ og $b=56,85^\circ$

Find derefter alle størrelserne i polartrekanten.

² Hint: Du kan jo søge på "SAS Nordpolen".