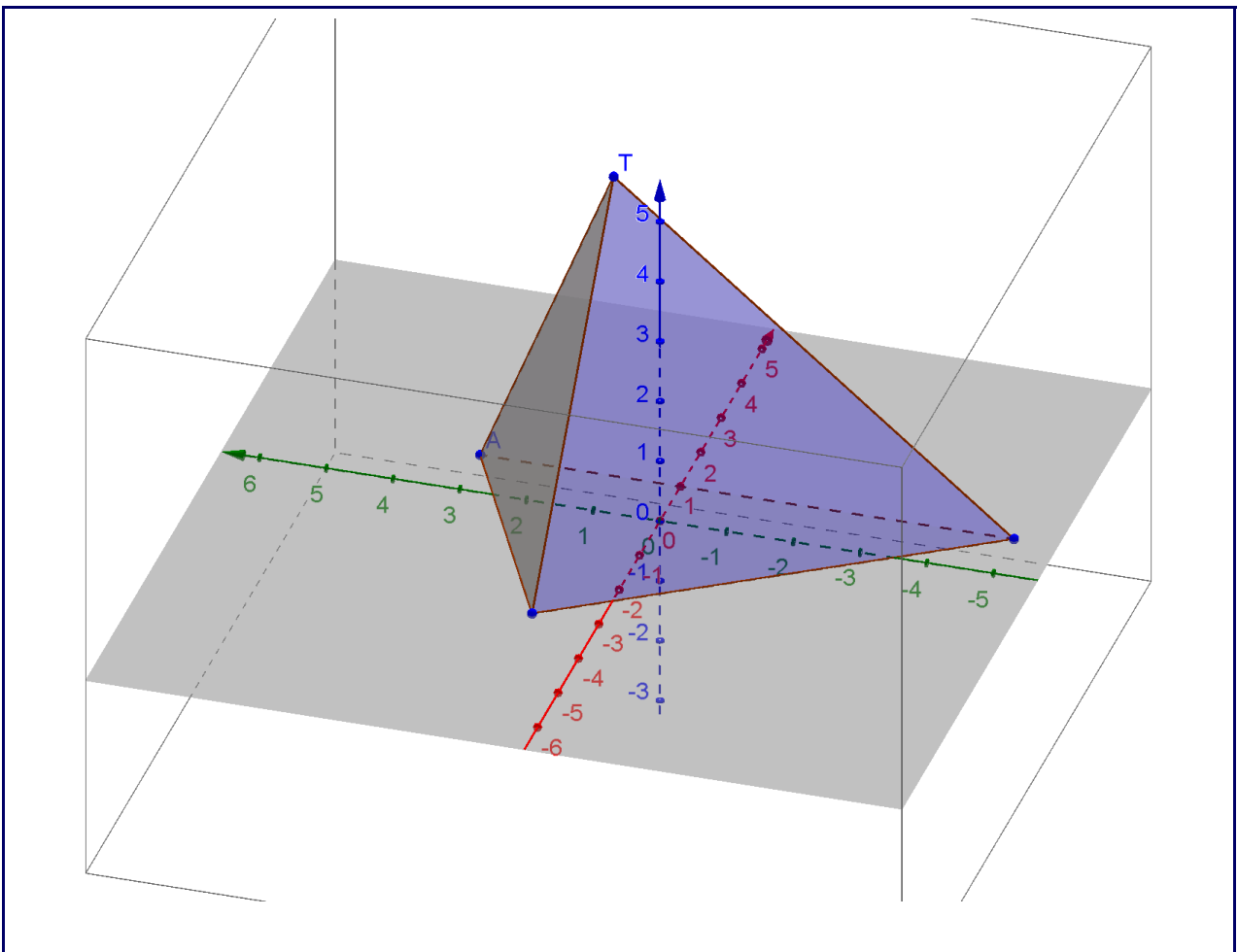


# Rumgeometri



Ib Michelsen

Ikast 2015

# Indholdsfortegnelse

|                                                |    |
|------------------------------------------------|----|
| Vektorer i rummet.....                         | 4  |
| Definition af vektor.....                      | 4  |
| Øvelse 1. Regneregler.....                     | 5  |
| Skalarprodukt (Definition).....                | 5  |
| Øvelse 2. Regneregler for skalarproduktet..... | 5  |
| Øvelse 3. Vinklen mellem vektorer.....         | 5  |
| Lemma.....                                     | 6  |
| Bevis for .....                                | 6  |
| Projektionsvektor.....                         | 6  |
| Definition.....                                | 6  |
| Sætning.....                                   | 7  |
| Bevis .....                                    | 7  |
| Vektorprodukt.....                             | 7  |
| Definition.....                                | 7  |
| Øvelse 4. Ensbetydende definitioner.....       | 7  |
| Sætning.....                                   | 8  |
| Øvelse 5.....                                  | 8  |
| Øvelse 6. Regneregler for vektorproduktet..... | 8  |
| Arealsætningen.....                            | 8  |
| Sætning; Højrehåndsreglen.....                 | 8  |
| Sætning.....                                   | 9  |
| Bevis.....                                     | 9  |
| Linjens parameterfremstilling.....             | 10 |
| Sætning.....                                   | 10 |
| Bevis.....                                     | 11 |
| En plan.....                                   | 11 |
| Definition I.....                              | 11 |
| Definition II.....                             | 11 |
| Definition III.....                            | 11 |
| Bemærkning.....                                | 11 |
| Definition IV.....                             | 11 |
| Øvelse 7.....                                  | 12 |
| Skæringspunkter og -linjer.....                | 12 |
| 1. Linje – linje.....                          | 12 |
| Eksempel på beregning.....                     | 12 |
| 2. Linje – plan.....                           | 13 |
| Beregningsmetode.....                          | 13 |
| 3. Plan – plan.....                            | 14 |
| 4. Linje - Kugle.....                          | 14 |
| 5. Plan - Kugle.....                           | 14 |
| 6. Kugle - Kugle.....                          | 14 |
| Øvelse 8.....                                  | 15 |
| Vinkler.....                                   | 17 |

|                                         |    |
|-----------------------------------------|----|
| 1. Linje - Linje (Vektor - Vektor)..... | 17 |
| 2. Linje - Plan.....                    | 17 |
| 3. Plan - Plan.....                     | 18 |
| Vinkelberegning i en pyramide.....      | 19 |
| Afstandsformler.....                    | 19 |
| 1. Punkt - Punkt.....                   | 20 |
| Sætning.....                            | 20 |
| Kuglens ligning.....                    | 20 |
| Eksempel.....                           | 20 |
| 2. Punkt - Linje.....                   | 20 |
| Eksempel.....                           | 21 |
| 3. Linje - Linje.....                   | 23 |
| Øvrige Projektioner.....                | 23 |
| 1. Vektor - plan.....                   | 23 |
| 2. Vektor - Vektor.....                 | 24 |
| 3. Punkt - Plan.....                    | 24 |
| Den typiske eksamensopgave.....         | 25 |
| Opgaven.....                            | 25 |
| Løsningen.....                          | 26 |
| 3D-opgaver fra årene 2012-13.....       | 29 |
| Stikordsregister.....                   | 36 |

---

Version 2

1. Rettelser side 6, 7 (og tilføjelse af bevis), 10,12, 15 (pkt 7.4)

## Vektorer i rummet

Definitionen af en vektor i rummet kan lyde nøjagtig på samme måde som i planen:

### Definition af vektor

En *egentlig vektor* har en længde (et reelt tal større end nul) og en retning. Den tegnes som en pil.

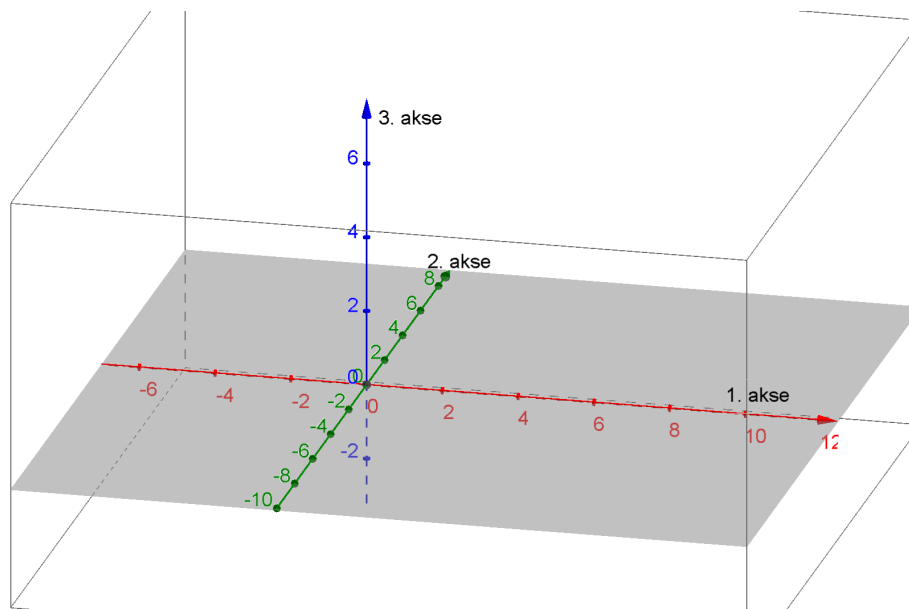
*Nulvektoren* er ikke en egentlig vektor; den har længden nul og ingen retning. Den tegnes som et punkt.

Tegnes vektoren fra origo kaldes vektoren en *stedvektor*; tegnes den fra ethvert andet punkt med samme længde og retning kaldes den en repræsentant for vektoren.

Vektorer beliggende på samme eller parallelle linjer kaldes parallelle. De kan være ensrettede eller modat rettede.

Men hvis vi har defineret et koordinatsystem i rummet benyttes naturligvis 3 koordinater til at beskrive vektoren. Koordinatsystemet vi benytter er et retvinklet *højresystem*: det betyder, at de 3 akser står vinkelret på hinanden således, at når du lægger højre underarm på 1. akse lige før origo, bøjer fingrene (fra lillefinger til pegefinger) så de danner en ret vinkel med underarmen og placerer dennes vinkelspids lige over origo med fingrene pegende i 2. aksens positive retning, så peger tommelfingeren i 3. aksens positive retning.

Kontroller det på tegningen herunder:





Når vi benytter koordinater til at definere en vektor ser det sådan ud:  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

De regler, der gælder for regning med plane vektorer findes tilsvarende for rumvektorer og bevises med koordinatberegninger. Bemærk, at reglerne "arves" fra tilsvarende regler, der gælder for de reelle tal .

### Øvelse 1. Regneregler

- Vis at følgende regler gælder for vektorerne  $u$ ,  $v$  og  $w$  samt skalarerne  $\alpha$  og  $\beta$ :
  - $u + v = v + u$  Den kommutative regel
  - $u + (v + w) = (u + v) + w$  Den associative regel
  - $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
  - $(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$
  - $\alpha(\beta u) = (\alpha \beta)u$

### Skalarprodukt (Definition)

Givet to vektorer  $u$  og  $v$  defineres deres skalarprodukt (prikproduktet):

$$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

### Øvelse 2. Regneregler for skalarproduktet

Bevis de følgende sætninger, hvor  $\alpha$  er en skalar og  $u$  og  $v$  og  $w$  er vektorer. Beviset for den første kan ses på næste side.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v})$
- $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$
- $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Sammenlign med de tilsvarende regler for vektorer i planen.

### Øvelse 3. Vinklen mellem vektorer

- Omskriv den sidste sætning i øvelse 2, så det ses (igen), at skalarproduktet kan beregnes alene med længder af vektorer og derfor er uafhængigt af det valgte koordinatsystem.
- Vis også, at  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |u| \cdot |v| \cos(\alpha)$  , hvor  $\alpha$  er vinklen mellem de to vektorer.

## Lemma

Hvis vinklen mellem vektorerne er hhv.  $0^\circ$ , spids, ret, stump eller lige følger at skalarproduktet er hhv. 1, mellem 0 og 1, 0, mellem -1 og nul eller -1 (og omvendt!)

## Bevis for $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

|                                                                                                                                                 |                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ | (1) Vektorerne skrives ved hjælp af deres koordinater                                                                |
| $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$                                                                         | (2) Skalarproduktet beregnes iht. definition af skalarprodukt                                                        |
| $\vec{v} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ | (3) Vektorerne skrives ved hjælp af deres koordinater                                                                |
| $\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + v_3 \cdot u_3$                                                                         | (4) Skalarproduktet beregnes iht. definition af skalarprodukt                                                        |
| $\vec{v} \cdot \vec{u} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$                                                                         | (5) I hvert led kan rækkefølgen af faktorer ombyttes, da den kommutative lov gælder for multiplikation af reelle tal |

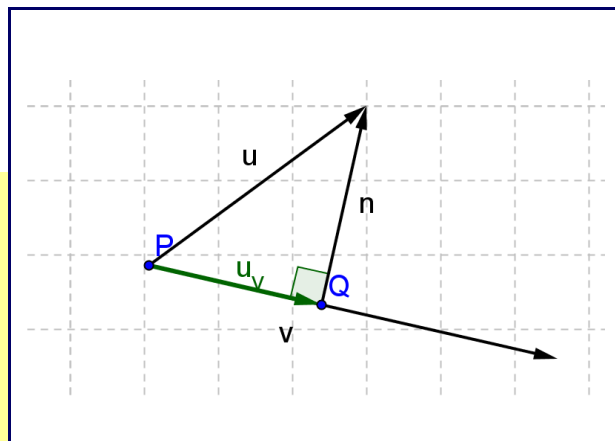
Ved sammenligning af ligningerne (2) og (5), ses, at sætningen er bevist. Projektionsvektor

## Projektionsvektor

### Definition

En repræsentant for projektionen af  $\mathbf{u}$  på  $\mathbf{v}$  fås ved at tegne de to (egentlige) vektorer med samme begyndelsespunkt  $P$  og nedfælde den vinkelrette fra  $\mathbf{u}$ 's endepunkt på en linje gennem  $\mathbf{v}$  (til punktet  $Q$ ).

Projektionen er  $\vec{u}_{\vec{v}} = \overrightarrow{PQ}$



## Sætning

For ovennævnte vektorer gælder:

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} \quad \text{og} \quad |\vec{u}_{\vec{v}}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

## Bevis

Gentag det helt tilsvarende bevis fra 2D.

## Vektorprodukt

### Definition

Givet to vektorer  $u$  og  $v$  er et vektorprodukt er en vektor  $w = u \times v$ , der defineres som:

$$w = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Bemærk, at vektorproduktet er et produkt af to vektorer (som skalarproduktet), men at resultatet er en vektor i modsætning til skalarproduktet, som er en skalar (et tal!)

På grund af skrivemåderne for produkterne benyttes også betegnelserne krydsprodukt hhv. prikprodukt.

Formlen for vektorproduktet huskes måske nemmere med følgende "definition" (som altså egentlig er en huskeregel):

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Det er en vektor, der beregnes på samme måde som en determinant. Enhedsvektorerne er  $i, j$  og  $k$ . Determinantens 2 nederste rækker er vektorerne koordinater.

## Øvelse 4. Ens betydende definitioner

- Vektorproduktet er det samme for begge definitioner.

Vis det!

## Sætning

Vektorproduktet står vinkelret på sine faktorer:  $w$  står vinkelret på  $u$  og  $w$  står vinkelret på  $v$ .

## Øvelse 5

- Bevis ovenstående sætning.

## Øvelse 6. Regneregler for vektorproduktet

Bevis de følgende sætninger vedr. vektorproduktet, hvor  $\alpha$  er en skalar og  $u$  og  $v$  og  $w$  er vektorer:

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha \vec{v})$
- $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$
- $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha)$

De 4 første sætninger bevises ved beregning af koordinater for begge sider af ligningerne. I den 5. sætning er  $\alpha$  størrelsen på vinklen mellem vektorerne. I beviset for den sidste sætning går du ud fra den 4. sætning. Benyt sætningen om skalarproduktet (side 5, øvelse 3, sidste punkt). Benyt så identiteten:  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ . Bemærk, at  $\sin(\alpha) \geq 0$ .

## Arealsætningen

Lad  $u$  og  $v$  være to egentlige vektorer og  $\alpha$  størrelsen på vinklen mellem dem. Så er arealet  $P$  af det udspændte parallelogram:

$$P = |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha)$$

Sætningen er en umiddelbar følge af den sidste sætning i øvelse 6 og beregning af arealer i plngeometrien. Bemærk at sætningen også er sand, hvis en eller begge vektorer er nulvektoren (hvis man accepterer, at det degenererede parallelogram har arealet 0.) Tilsvarende er sætningen også sand, hvis vektorerne er parallelle. Omvendt ses, at er vektorerne egentlige og  $P = 0$ , må vektorerne være parallelle.

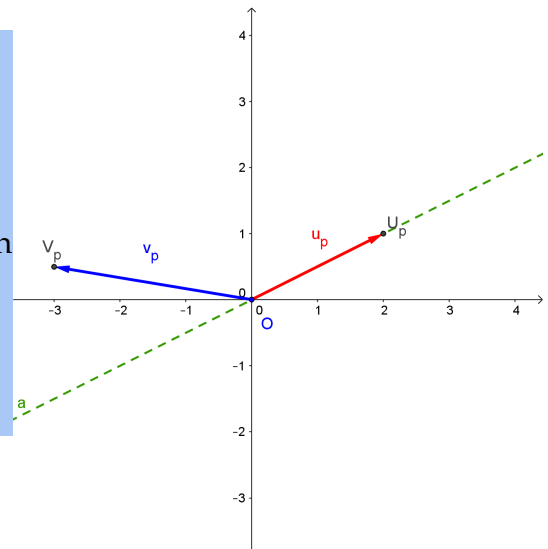
## Sætning: Højrehåndsreglen

Vi har beregnet længden af vektorproduktet (i øvelse 6) og konstateret, at det står vinkelret på sine faktorer. Men der er to muligheder for retningen! Den skal højrehåndsreglen finde.

## Sætning

Lad der være givet to vektorer  $u$  og  $v$ ,  $u, v \in \mathbb{R}^3$ .  
Repræsentanter for  $u$  og  $v$  tegnes fra samme punkt.

Højrehåndsreglen siger: at holdes højre hånd over vektoren  $u$  med fingrene pegende i samme retning som vektoren og bøjes de 4 af fingrene (alle undtagen tommelfingren) ind mod håndfladen, hvorefter hånden roteres, så de 4 fingre peger mod vektor  $v$ : Så vil tommelfingeren pege i samme retning som vektorproduktet.



(På tegningen ses vektorernes lodrette projektioner på planen  $z = 0$ .)

## Bevis

Vi forudsætter, at vinkler i planen:  $z = 0$  måles med den sædvanlige omløbsretning: mod uret. Lad  $u_p, v_p$  være de lodrette projektioner af de tilsvarende vektorer og lad  $w_p$  være vektorproduktet af disse projektioner. På tegningen er vinklen fra  $u_p$  til  $v_p$ , altså en stump positiv vinkel  $\alpha$ .

For planvektorer gælder, at  $\det_{2D}(u_p, v_p) = |u_p| \cdot |v_p| \cdot \sin(\alpha)$ . Dvs., at determinant og vinkel har samme fortegn. Betragtet som rumvektorer, gælder at vektorproduktet

$$\vec{w}_p = \vec{u}_p \times \vec{v}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k} = \det_{2D}(u_p, v_p) \cdot \vec{k}$$

Derfor vil  $w_p$  være ensrettet med  $\vec{k}$ , når  $\alpha$  er positiv og modsat rettet, når  $\alpha$  er negativ. Det er i overensstemmelse med højrehåndsreglen. (Kontroller det!)

Nu vil vi undersøge det tilsvarende for de oprindelige vektorer:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Af definitionen på vektorproduktet ses umiddelbart, at 3. koordinat er det samme som

$\det_{2D}(u_p, v_p)$ , hvilket medfører at  $w_p$  og  $w$  har samme retning, hvis der kun tales om "op" eller "ned".

Men højrehåndsreglen giver også det samme resultat for de oprindelige vektorer og deres projektioner, fordi

- Benyttes højrehåndreglen på projektionerne og vender tomten fx opad vil den stadig vende opad, hvis vi drejer  $u_p$  opad eller nedad til  $u$  og lader hånden følge med. Det forudsættes, at drejningen er mindre end en ret vinkel<sup>1</sup>.
- Den lodrette plan gennem  $u$  og  $u_p$  deler rummet i to halvrum, hvor  $v$  og  $v_p$  ligger i samme halvrum. Skal de 4 fingre pege direkte mod  $v$ , skal hånden rotere om en akse gennem  $u$ , men mindre end en ret vinkel.<sup>2</sup> Derfor vil tomten stadig pege opad, hvis den pegede opad i udgangspunktet. De to vektorprodukter har altså begge samme retning (op eller ned.)

Sammenholdes dette med beregningerne fås:

- Det vil sige, at højrehåndsreglen giver de samme resultater for retningen af vektorproduktet af rummets vektorer og retningen af vektorproduktet af de tilsvarende projektioner, hvis der kun ses på "op" og "ned".
- Da beregning, som set ovenfor også giver samme resultat og da beregning og højrehåndsregel stemmer overens for projektionerne, gælder højrehåndsreglen også for alle rumvektorer.

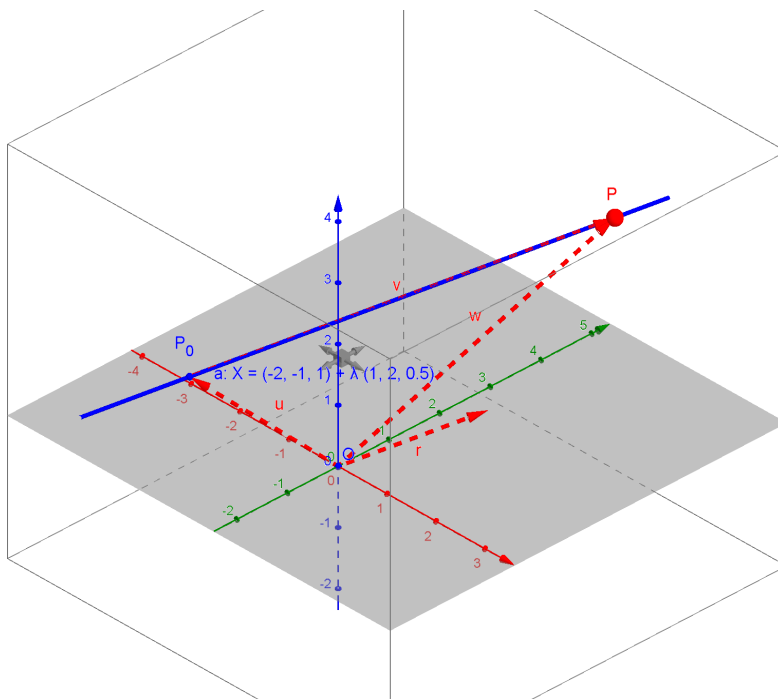
## Linjens parameterfremstilling

Linjen  $a$ , der ses på tegningen til højre, er givet som en linje gennem punktet  $P_0$  og parallel med retningsvektoren  $\vec{r}$ .

## Sætning

Ethvert punkt på linjen har en  
stedvektor, der kan skrives som

$\vec{OP} = OP_0 + \lambda \vec{r}$  , og hvis et punkt har denne stedvektor, ligger det på linjen.



1 Tilfældet hvor der er tale om en ret vinkel behandles let som et specialtilfælde

2 Tilfældet hvor der er tale om en ret vinkel behandles let som et specialtilfælde

## Bevis

Beviset ligner beviset for den tilsvarende sætning i plangeometrien.

## En plan

En bestemt plan  $\alpha$  kan defineres på forskellige måder, medens punktmængden, der udgør planen, er den samme.

### Definition I

Givet 3 punkter i  $\alpha$ :  $A$ ,  $B$  og  $C$  (som ikke ligger på en ret linje) består planen af alle punkter på alle linjer, der kan tegnes mellem punkter i planen.

### Definition II

Givet et punkt  $P_0$  i planen og to lineært uafhængige *retningsvektorer*  $\vec{r}_1$  og  $\vec{r}_2$  (dvs. vektorer med en repræsentant som  $\overrightarrow{P_1 P_2}$ , hvor begge punkter ligger i planen), er

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \vec{r}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{r}_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

### Definition III

Givet et punkt  $P_0$  i planen og en *normalvektor*  $\vec{n}$  (dvs. en vektor, der står vinkelret på alle retningsvektorer i planen), er

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = 0 \right\}$$

## Bemærkning

Står en vektor vinkelret på to lineært uafhængige retningsvektorer i en plan, står den vinkelret på alle vektorer i planen.

### Definition IV

Givet ligningen  $ax + by + cz + d = 0$ , er

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| ax + by + cz + d = 0 \right\}$$

## Øvelse 7

Vis at definitionerne er ækvivalente og at bemærkningen er sand.

Vis at  $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  er en normalvektor til planen.

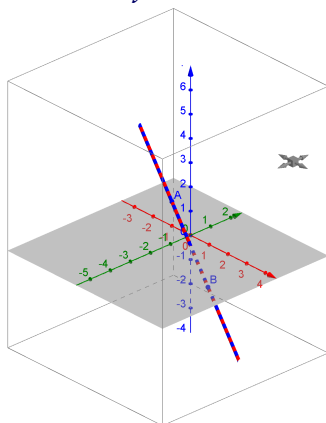
## Skæringspunkter og -linjer

Skæringspunkter og -linjer kan i GeoGebra findes med kommandoen Skæring[Objekt , Objekt]; svar kan være et punkt oplyst med koordinater, et givet med parameterfremstillingen eller udefineret / ?. Det sidste svar kan forekomme, når der ikke er nogen skæring og når linjer / planer er sammenfaldende. Sådanne svar kræver altså en (let) ekstra undersøgelse.

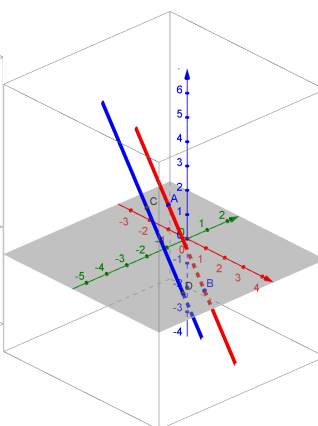
### 1. Linje - linje

For to linjer er der 4 muligheder: de to linjer kan være identiske og så er alle linjens punkter skæringspunkter, eller de kan være parallelle, og så er der ingen skæringspunkter. De kan skære hinanden i et punkt eller de kan være vindskæve, og så er der ingen skæringspunkter. Det sidste kan du illustrere med dine underarme: kryds dem og lad den ene være lidt højere oppe end den anden (så armene ikke rører hinanden.)

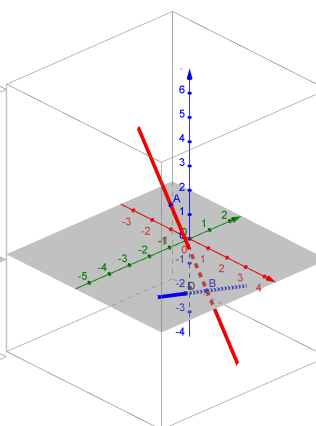
Sammenfaldende



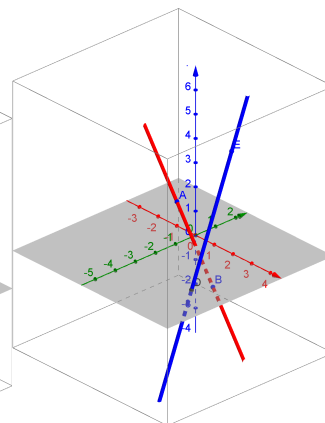
Parallelle



Skærende



Vindskæve



### Eksempel på beregning

Der er givet 2 linjer med parameterfremstillingerne:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Vi skal så finde en værdi af lambda for hver linje, således at alle tre koordinater bliver ens. De kan findes alene ved at løse ligningerne, hvor de to første koordinater bliver ens. Findes der et skæringspunkt, skal 3. koordinat automatisk blive ens i fremstillingerne.

$$\begin{pmatrix} -1+3\lambda_1 \\ 0-1\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1\lambda_2 \\ -1-2\lambda_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5}{5} = 1, \lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{5} = 0$$

Benyttes første parameterfremstilling fås:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Benyttes anden parameterfremstilling fås:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Da også 3. koordinat bliver den samme for begge linjer, findes der et skæringspunkt, som her er:

$$S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

## 2. Linje - plan

Der er givet en plan defineret ved en ligning i  $x$ ,  $y$  og  $z$  og en linje med en parameterfremstilling baseret på punktet  $P_0$  og retningsvektoren  $r$ .

Der er nu 3 muligheder: Linjen kan skære planen i et punkt, linjen kan ligge i planen og så er alle linjens punkter "skæringspunkter" eller linjen kan ligge parallelt med planen uden at skære denne.

## Beregningsmetode

Ved indsætning af parameterfremstillingens koordinater i planens ligning fås:

$$a(x_0 + \lambda r_1) + b(y_0 + \lambda r_2) + c(z_0 + \lambda r_3) = -d \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \right) = -d \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} + \lambda \vec{n} \cdot \vec{r} = -d$$

idet stedvektoren til  $P_0$  kaldes  $u$  (og har samme koordinater som punktet) og

normalvektoren  $\mathbf{n}$  har koordinaterne  $(a,b,c)$ .

Hvis retningsvektoren er parallel med planen er  $\mathbf{n}$  og  $\mathbf{r}$  ortogonale og  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$ .

1. Hvis  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$  og  $\vec{n} \cdot \vec{u} = -d$  ligger  $P_0$  i planen og så ligger hele linjen i planen.
2. Hvis  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$  og  $\vec{n} \cdot \vec{u} \neq -d$  ligger  $P_0$  ikke i planen og linjen skærer ikke planen.
3. Hvis  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \neq 0$  har ligningen en entydig løsning for  $\lambda$ ; denne indsættes i parameterfremstillingen for at finde skæringspunktet.

### 3. Plan - plan

To planer kan skære hinanden i en linje eller de kan være sammenfaldende eller de kan være parallelle. Vi finder linjen eller planen eller at der ingen skæring er ved at løse to ligninger med to ubekendte. De kan skrives som matrixligningen:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \end{pmatrix}$$

Er der en modstrid i ligningssystemet skyldes det, at der er tale om parallelle planer. Er der en fri variabel, er der tale om at skæringen er en linje, er der to er det en plan.

### 4. Linje - Kugle

Beregningsmetoden ligner skæringen mellem linje og plan: Her bliver ligningen dog en andengradligning med 3 muligheder: linjen kan gå gennem kuglen (2 løsninger), linjen kan tangere kuglen (1 løsning) eller linjen rører ikke kuglen (0 løsninger).

### 5. Plan - Kugle

Afhængig af afstanden fra kuglens centrum (se ligningen side 20) til planen kan der være ingen eller et skæringspunkt eller en cirkel som skæringskurve. Løsningen er beslægtet med 5. Kugle - Kugle. (Se nedenunder)

### 6. Kugle - Kugle

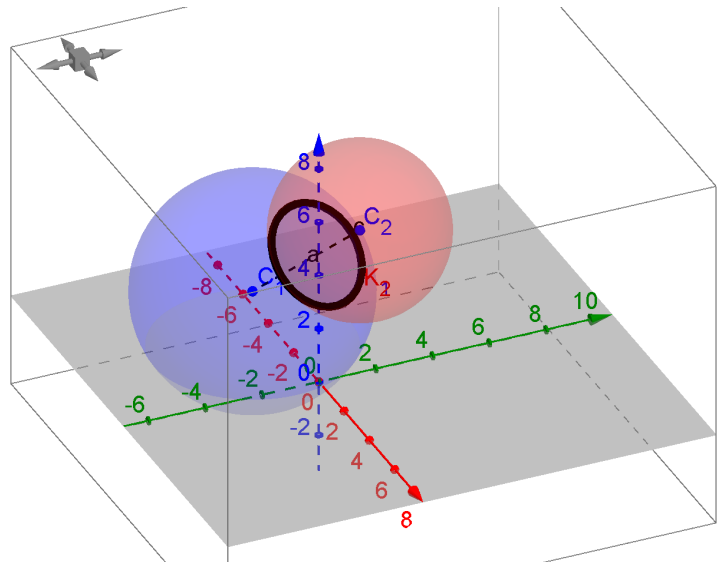
Du skal finde skæringen mellem to kugleoverflader. Det er let at se, at der er flere muligheder: kuglerne kan være så langt fra hinanden, at der ingen punkter er fælles eller den ene kan være helt inden i den anden, og så er der heller ingen punkter fælles. Afstanden kan også være sådan, at de lige rører hinanden i et punkt eller den tredje mulighed: De skærer hinanden og fællesmængden er en cirkel. Det er den sidste situation, vi vil undersøge.

## Øvelse 8

Find parameterfremstillingen for cirklen, der er fælles for kuglerne  $K_1$  og  $K_2$  som har centre i hhv.  $C_1=(-3,-1,2)$  og  $C_2=(1,1,6)$  og radier  $r_1=4$  og  $r_2=3$ .

### Metode

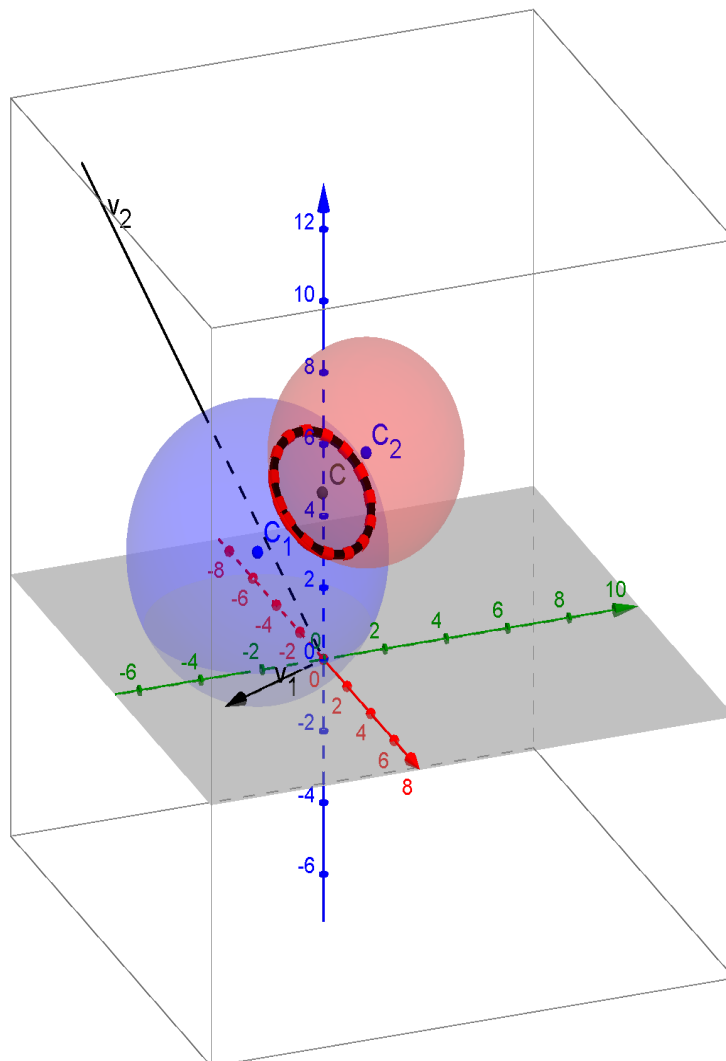
1. Indtast kuglerne som defineret her
2. Find skæringen mellem dem
3. Rediger cirkelns (keglesnittets) egenskaber hvad angår farve og strektykkelse, så den kan ses klart og tydeligt.
4. Din tegning skal ligne denne:
5. I algebravinduet kan du se det svar, vi leder efter.



1.  $c(t)$  er en stedvektor til et punkt på cirkelperiferien.  
Det beregnes ved hjælp af stedvektoren til centrum og en vektor fra centrum til et punkt på periferien, der afhænger af  $t$ .
6. Første opgave er at finde stedvektoren til centrum  $C$ :
  1. Centrum må ligge på linjestykket  $C_1C_2$  med længden  $a$ . (Hvorfor på  $C_1C_2$  ?)
  2. Beregn længden af linjestykket
  3. Find en formel til beregning af længden af linjestykket  $C_1C$  og find den. (Benyt formler fra algebra og plangeometri til at vise, at:  $\text{længden} = a_1 = \frac{a^2 + r_1^2 - r_2^2}{2a}$  )
  4. Beregn vektoren  $u = \overrightarrow{C_1C}$
  5. Find koordinaterne til  $C$

7. Nu vil vi finde to vektorer i samme plan som cirklen, der står vinkelret på hinanden. De skal begge stå vinkelret på vektor  $\overline{C_1C_2}$ . Hvorfor?

1. Indtast vektorerne  $i, j, k$  i GG. (Det er enhedsvektorerne på de tre akser.)
2. Højst en af  $i, j, k$  kan være parallel med  $u$ . Vælg en, der ikke er parallel med  $u$ , fx  $k$ .
3. Beregn vektorproduktet  $v_1 = u \times k$
4. Beregn vektorproduktet  $v_2 = u \times v_1$
5. Tegnes vektorerne med  $C$  som begyndelsespunkt, ligger de begge i samme plan som cirklen (der er skæring mellem kuglerne.)
6. Beregn enhedsvektorerne  $\vec{e}_1$  og  $\vec{e}_2$  med samme retninger som  $v_1$  og  $v_2$
7. Benyt GG's kurvekommando til at tegne cirklen
8. Kontroller, at de to cirkler er sammenfaldende
9. Hvad er ens og hvad er forskelligt i de to cirkelfremstillinger? Hvorfor?



## Vinkler

### 1. Linje - Linje (Vektor - Vektor)

Vinklen mellem linjer måles som vinklen mellem deres retningsvektorer. Det betyder, at selvom linjerne ikke skærer hinanden (altså er vindskeve), tales der stadig om vinklen mellem dem.

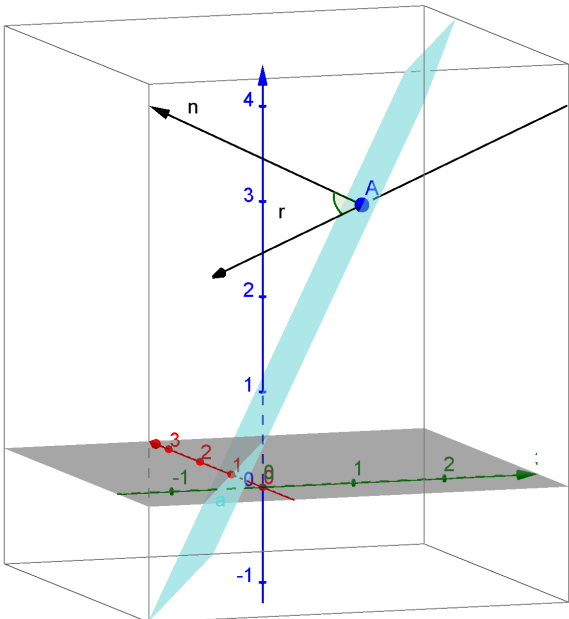
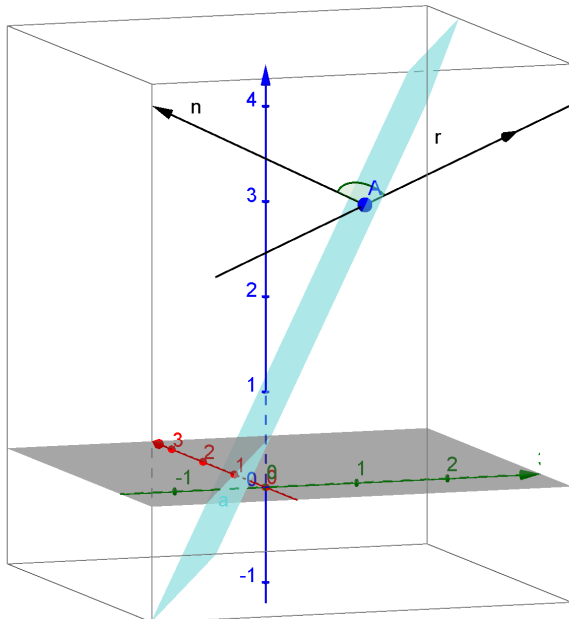
Vinklen findes som vinklen mellem linjernes retningsvektorer med formelen:

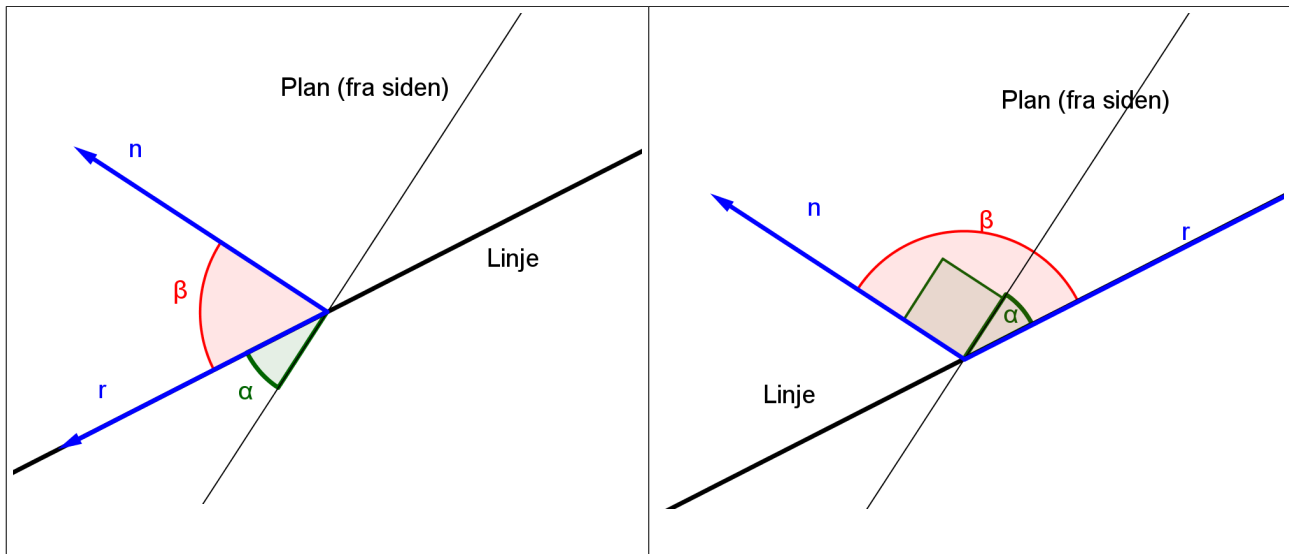
$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\alpha)$ , se side 5. Skalarproduktet kan være positivt eller negativt. Men valgte man en modsat rettet retningsvektor for den ene linje skifter fortegnet for vinklen og man får i stedet supplementvinklen som løsning. Vinkler mellem linjer angives som vinkler mellem  $0^\circ$  og  $180^\circ$ . Er opgaven at finde en spids eller en stump vinkel er svaret entydigt; ellers er der to svar.

Bemærk, at GeoGebra kan finde vinkler mellem linjer, men kun hvis de skærer hinanden.

### 2. Linje - Plan

For at finde vinklen mellem en linje og en plan ( $\alpha$ ), findes først vinklen mellem linjen og planens normalvektor ( $\beta$ ).

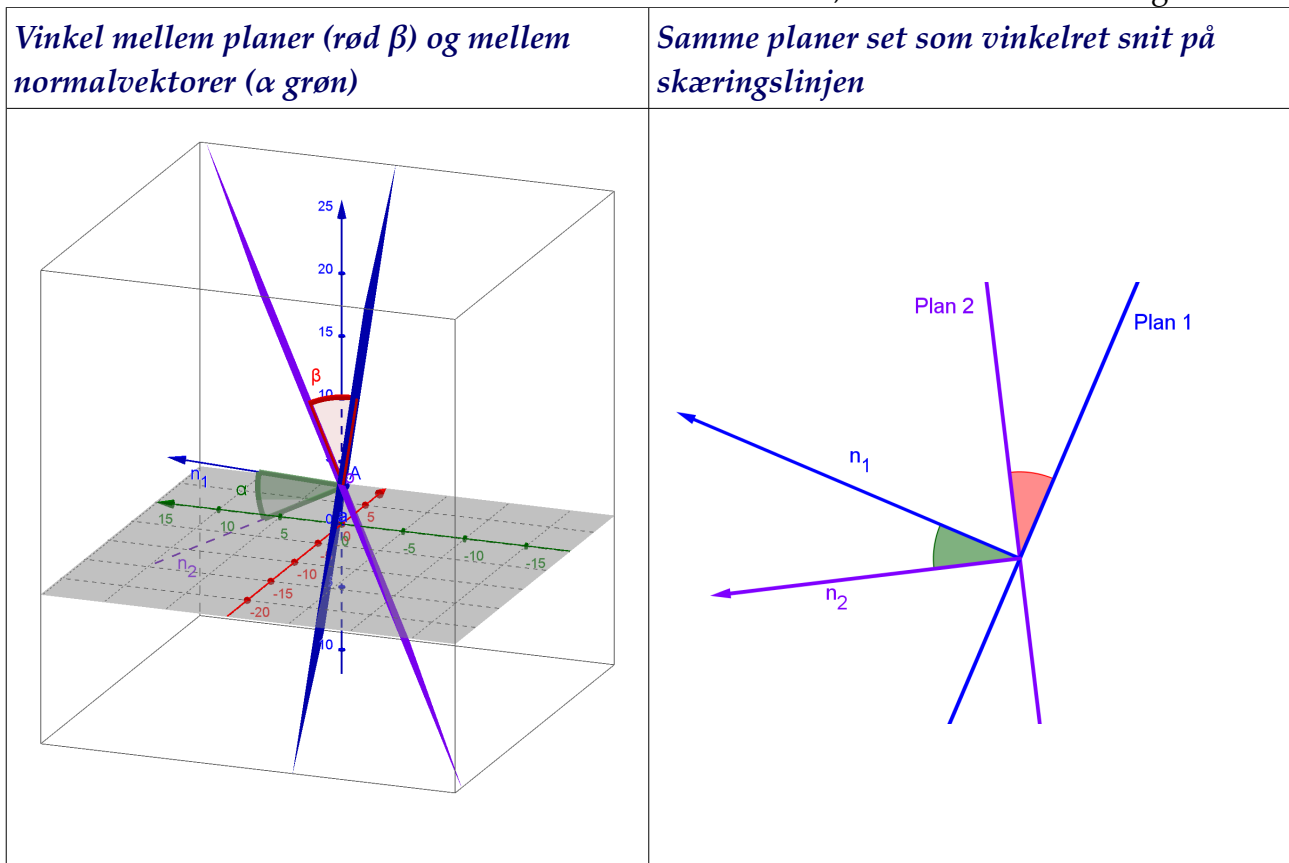
| Vinkel mellem vektorer er spids: $\alpha = 90^\circ - \beta$                        | Vinkel mellem vektorer er stump: $\alpha = \beta - 90^\circ$                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |



1. Er denne vinkel ( $\beta$ ) spids, findes vinklen mellem linje og plan ( $\alpha$ ) som komplementvinklen  $\alpha = 90^\circ - \beta$ .
2. Er denne vinkel ( $\beta$ ) stump, findes vinklen mellem linje og plan ( $\alpha$ ) som  $\alpha = \beta - 90^\circ$ , der er komplementvinkel til den stumpes supplementvinkel

### 3. Plan - Plan

Planer kan skære hinanden eller være parallelle. I begge tilfælde kan vinklen mellem dem findes som vinklen mellem deres normalvektorer. Bemærk, at der altid er to mulige svar:

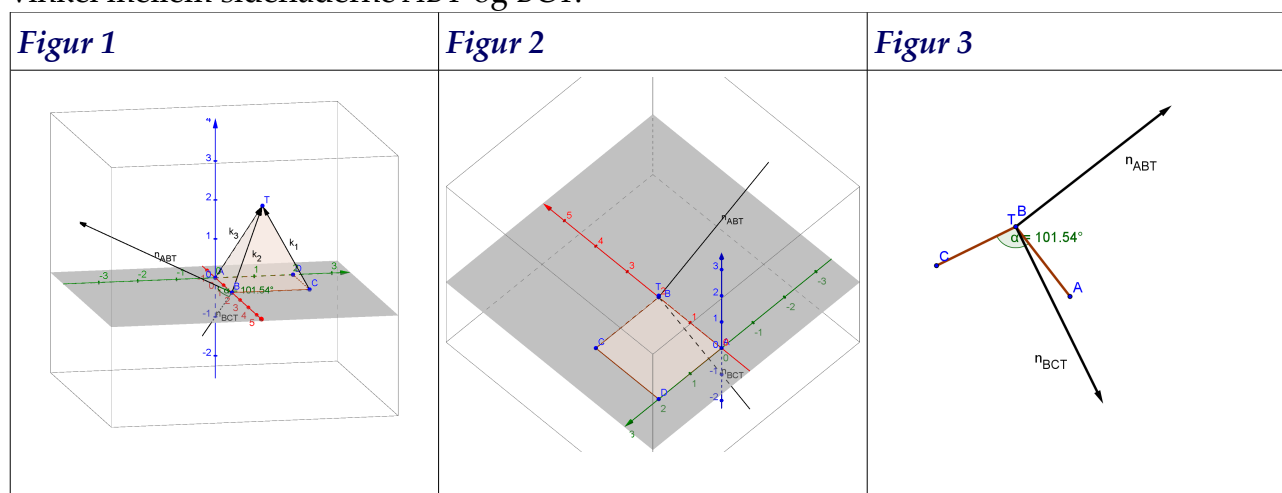


en spids vinkel og den tilsvarende stumpe supplementvinkel.

Med GeoGebra kan du få forskellige svar, når du beregner vinklen med planer hhv. normalvektorer. Derfor: Benyt normalvektorer og vær sikker på, at de har de rigtige retninger. Se metoden i eksemplet herunder.

## Vinkelberegning i en pyramide

Givet en pyramide med grundfladen  $ABCD$  og toppunkt  $T$ . Opgaven er at finde den indre vinkel mellem sidefladerne  $ABT$  og  $BCT$ .



De tre figurer herover viser alle den samme pyramide på 3 forskellige måder. I figur 1 ses, at der fra 3 af grundfladens hjørner er tegnet vektorer til  $T$ . Med disse vektorer er beregnet normalvektorer som vektorprodukter af disse. Nu er det vigtigt, at disse normalvektorer får den rigtige retning, så vi gør sådan:

1. For sidefladen  $BCT$  vil vi danne en normalvektor, der går "ind i" pyramiden. Derfor skal  $n_{BCT} = k_1 \times k_2$ . (Tjek: Tegn en repræsentant for  $k_1$  fra  $B$  og benyt højrehåndsreglen.)
2. For sidefladen  $ABT$  vil vi danne en normalvektor, der går "ud". Derfor skal  $n_{ABT} = k_3 \times k_2$ . (Tjek: Tegn en repræsentant for  $k_3$  fra  $B$  og benyt højrehåndsreglen.)
3. Nu findes vinklen mellem disse to normalvektorer.
4. På figur 2 og 3 ses pyramiden fra toppen med  $B$  lig under  $T$ . På den sidste tegning ses, at benyttes linjen gennem  $B$  og  $T$  som hængsel og drejes siden  $BCT$  over til  $BAT$ , vil vektor  $n_{BCT}$  dreje over i vektor  $n_{ABT}$ .
5. Konklusion: Vinklen mellem flader / planer er den samme som mellem normalvektorerne (defineret på denne måde.)

## Afstandsformler

Vi kan finde afstande mellem punkter, linjer, planer, punkt og linje, punkt og plan samt linje og plan.

## 1. Punkt - Punkt

### Sætning

$$|PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

som er en triviell følge af Pythagoras sætning.

### Kuglens ligning

En kugle med centrum i  $(x_0, y_0, z_0)$  og med radius  $r$  har ligningen

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

### Eksempel

Lad  $x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z = 2$

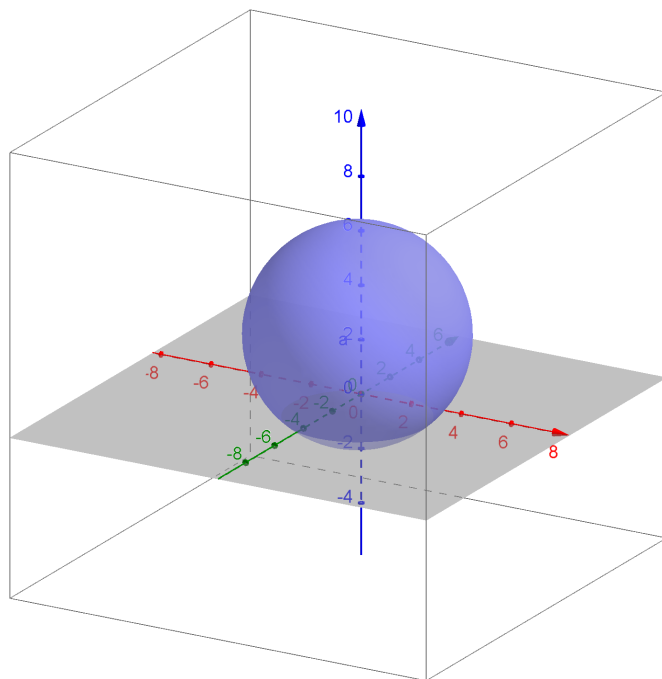
Vi vil finde centrum og radius for denne kugle ved en omskrivning af ligningen:

Koefficienterne til  $x$ ,  $y$  og  $z$  halveres så venstre side kan omskrives:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + (z - 3)^2 - 9 &= 2 \Leftrightarrow \\ (x^2 - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 &= 2 + 14 \Leftrightarrow \\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 &= 4^2 \end{aligned}$$

hvoraf ses, at

Centrum er  $(1, -2, 3)$  og radius er 4



## 2. Punkt - Linje

For et punkt  $P(x, y, z)$  og en linje med parameterfremstillingen  $X = P_0 + \lambda \vec{r}$  fås

afstanden ved at beregne arealet af en trekant (se næste side) på to forskellige måder:

Fra  $P_0$  tegnes retningsvektoren  $\vec{r}$  til punktet  $A$ ; det er grundlinjen i en trekant med  $P$  som det tredje punkt. Trekanten  $APP_0$  udspændes af vektorerne  $\vec{r}$  og  $\overrightarrow{P_0P}$ ; derfor kan arealet findes med formlen:

$$T = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \overrightarrow{P_0P} \right|$$

Men da linjen med den korteste afstand står vinkelret på linjen  $l$  (i  $Q$ ), kan arealet også



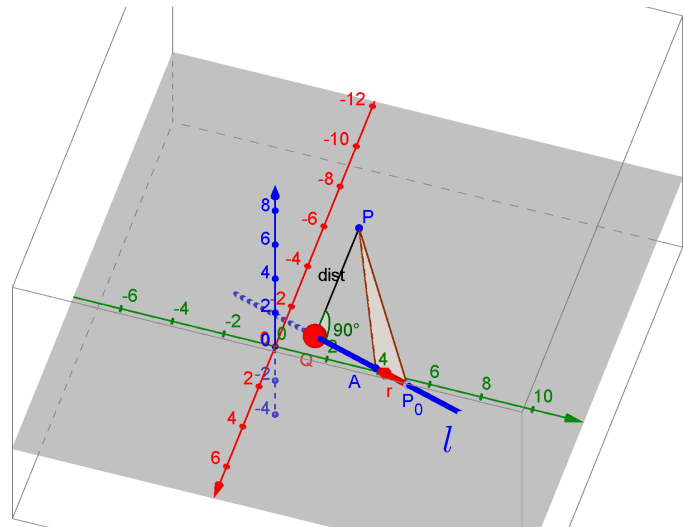
beregnes som:

$$T = \frac{1}{2} \text{dist} \cdot |\vec{r}|$$

$\text{dist}$  findes så med ligningen:

$$\frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \overrightarrow{P_0P} \right| = \frac{1}{2} \text{dist} \cdot |\vec{r}| \quad \text{som}$$

$$\text{dist} = \frac{\left| \vec{r} \times \overrightarrow{P_0P} \right|}{|\vec{r}|}$$



Q kan nu findes som skæringspunkt med linjen og kuglen med centrum i P og radius  $\text{dist}$  (dvs. det punkt linjen tangerer kuglen.) Alternativt (og lettere) kan Q findes først, idet vi finder projektionen af  $\overrightarrow{P_0P}$  på  $\vec{r}$  ( $\vec{p}$ ).

$$\vec{p} = \frac{\vec{r} \cdot \overrightarrow{P_0P}}{\vec{r} \cdot \vec{r}} \vec{r}^3$$

Q har så koordinater som stedvektoren  $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0Q} = \overrightarrow{OP_0} + \vec{p}$

Afstanden kan nu også findes som afstand mellem punkter.

## Eksempel

Lad  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  og linjen  $l$  givet ved:  $X = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Opgaven er at finde afstanden fra  $P$  til  $l$  og at finde punktet  $Q$  på  $l$ , der ligger tættest på  $P$ . Retningsvektorer findes direkte af linjens parameterfremstilling og vektoren fra punkt til punkt ved subtraktion:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}; \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Disse vektorer indsættes i  $\text{dist} = \frac{\left| \vec{r} \times \overrightarrow{P_0P} \right|}{|\vec{r}|}$

3 Sammenlign med Projektionsvektor. Vektorer i Planen, Vektorer (IM 2014) og den tilsvarende formel i Projektioner og ortogonalitet, Lineær Algebra (IM 2015)

$$dist = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 33 \\ 15 \end{pmatrix} \right|}{6,16} = \frac{36,37}{6,16} = 5,90$$

For at finde  $Q$  projiceres vektoren

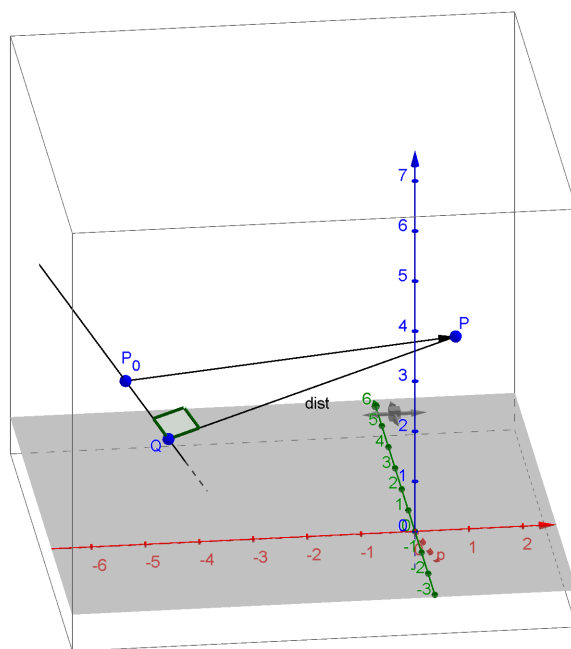
$$\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ind på retningsvektoren}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ som } \vec{p}.$$

$$\vec{p} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,87 \\ 0,58 \\ -1,45 \end{pmatrix}$$

Bemærk: Udtrykket på brøken er en skalar, der multipliceres med retningsvektoren længst til højre.

$$\text{Derfor bliver } Q = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,87 \\ 0,58 \\ -1,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,13 \\ 3,58 \\ 0,55 \end{pmatrix}$$

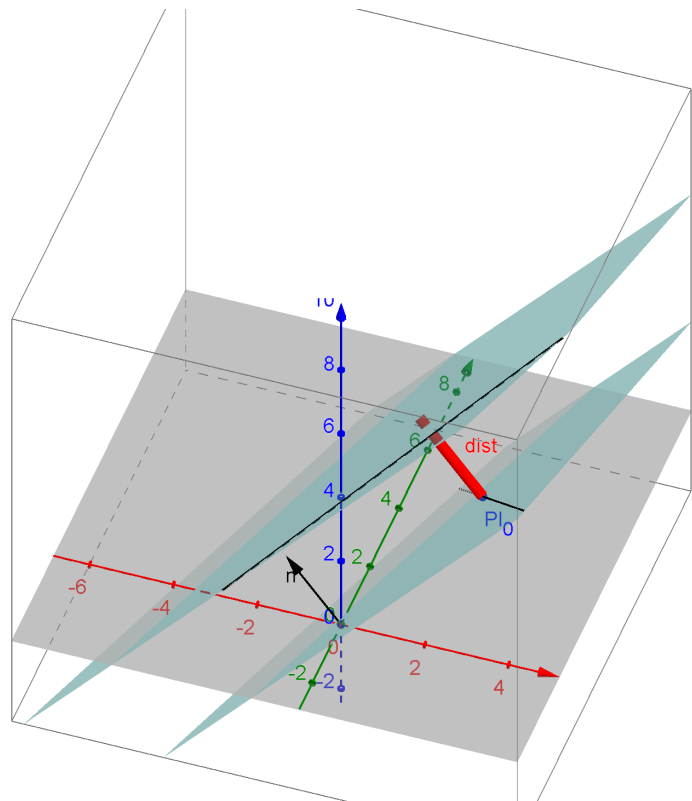


Afstanden mellem  $P$  og linjen  $l$  er 5,90 og  $Q = \begin{pmatrix} -4,13 \\ 3,58 \\ 0,55 \end{pmatrix}$  er punktet på  $l$ , der er tættest på  $P$ .

### 3. Linje - Linje

Det er vinkelret linjer, der er interessante: Den korteste afstand mellem to sådanne ( $l$  og  $m$ ) er længden af et linjestykke  $a$ , der står vinkelret på begge linjer.  $a$  har så en retningsvektor  $\vec{n}$ , som er vektorproduktet af de vinkelrette linjers retningsvektorer.

Laves der planer vinkelret på  $a$  i endepunkterne, vil det ene plan indeholde  $l$  og det andet plan  $m$ . Lad punkterne  $Pl_0$  og  $Pm_0$  være givne punkter på hver sin linje. Længden af vektoren  $\overrightarrow{Pl_0 Pm_0}$ 's projektion på  $\vec{n}$  er så længden af  $a$  og dermed afstanden mellem linjerne.



$$dist = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{Pl_0 Pm_0}|}{|\vec{n}|},$$

hvor  $\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$

### Øvrige Projektioner

#### 1. Vektor - plan

Givet planen  $\alpha$  og vektor  $u$ .  $u_p$  er den søgte projektion på planen og  $u_n$  er projektionen på normalvektoren. Så gælder:

$$\vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_n \Leftrightarrow \vec{u}_p = u - \vec{u}_n = \vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n},$$

$$\vec{u}_p = \vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$$

## 2. Vektor - Vektor

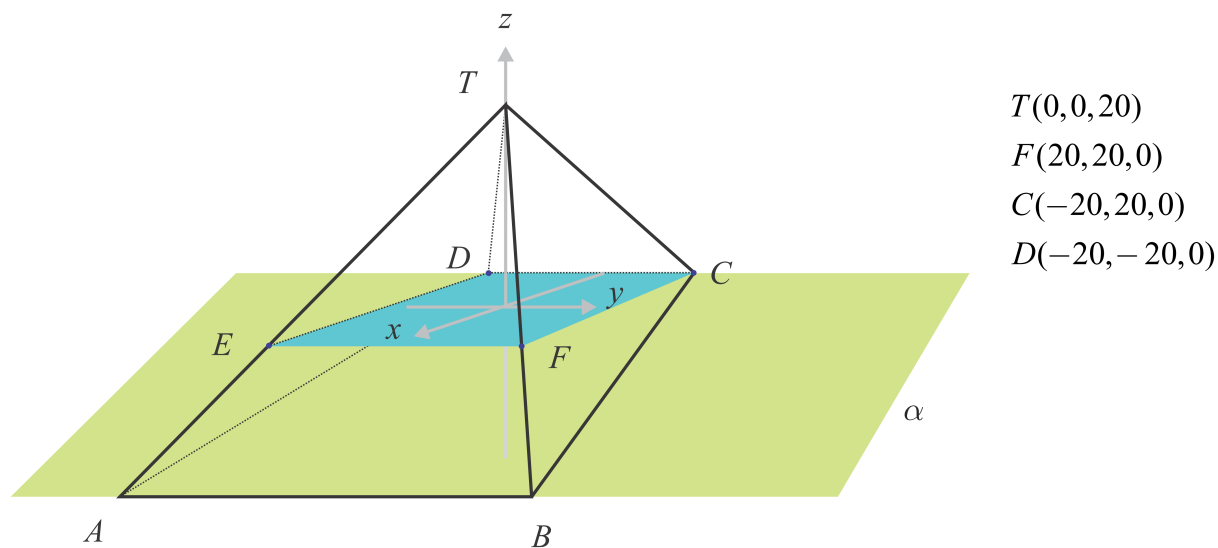
Se Projektionsvektor (side 6)

## 3. Punkt - Plan

Fra et vilkårligt punkt  $P_0$  i planen findes vektoren til  $P$ :  $\overrightarrow{P_0P}$ . Find projektionen af denne vektor på planen:  $\vec{p}$  (Se punkt lige ovenover.). Lad  $Q$  være projektionen af  $P$  på planen. Så bliver stedvektoren til  $Q$ :  $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + \vec{p}$ , hvor  $O$  er origo.

## Den typiske eksamensopgave

### Opgaven



En pyramideformet bygning skal bygges på en skråning. På figuren ses en model af bygningen indtegnet i et koordinatsystem med enheden 1 m. Modellens fem hjørnepunkter betegnes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  og  $T$ . I modellen svarer kvadratet  $EFCD$  til et vandret gulv i bygningen, og firkanten  $ABCD$  svarer til bygningens grundplan. Firkanten  $ABCD$  er en del af planen  $\alpha$  med ligningen

$$x + 3z + 20 = 0.$$

- Bestem afstanden fra  $T$  til  $\alpha$ .
- Bestem vinklen mellem  $\alpha$  og sidefladen, der indeholder  $T$ ,  $D$  og  $C$ .
- Bestem en parameterfremstilling for linjen gennem  $T$  og  $F$ , og bestem koordinatsættet til punktet  $B$  i planen  $\alpha$ .

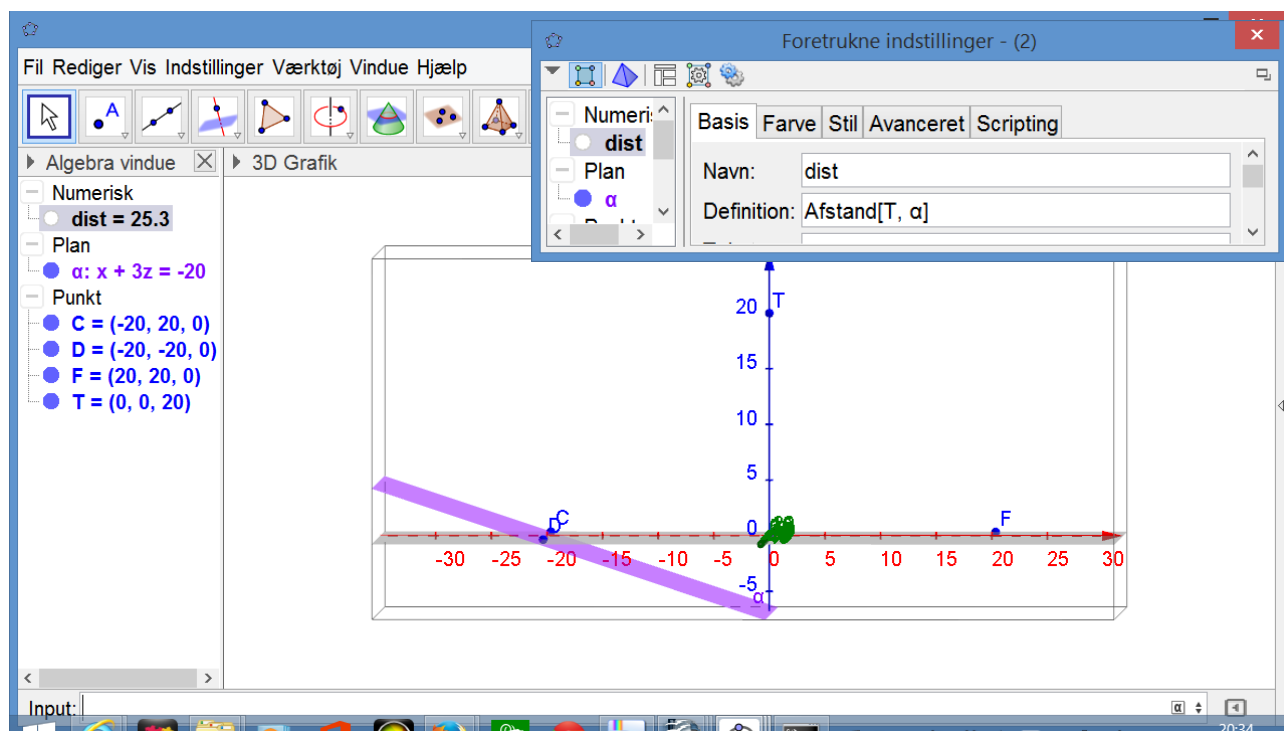
## Løsningen

Der er oplyst om en pyramideformet bygning:

- at den har et grundplan: firkanten  $ABCD$  som er en del af planen  $\alpha$  med ligningen:  
 $x + 3z + 20 = 0$
- Kvadratet  $EFCD$  er et vandret gulv i bygningen
- Koordinaterne til punkterne  $T$ ,  $F$ ,  $C$  og  $D$  er oplyst
- Længdeenheden er meter

### a) Afstanden fra $T$ til $\alpha$

Bygningen konstrueres som model i GeoGebra ved indtastning af planens ligning og punkternes koordinater.



Med afstandsfunctoen findes afstanden mellem  $T$  og  $\alpha$ :

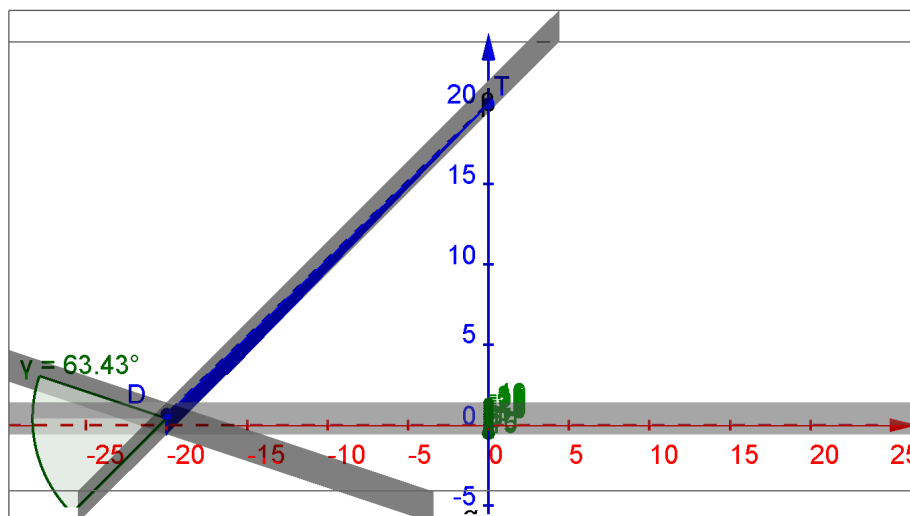
Afstanden = 25,3 meter

### b) Vinklen mellem sidefladen $TDC$ og planen $\alpha$

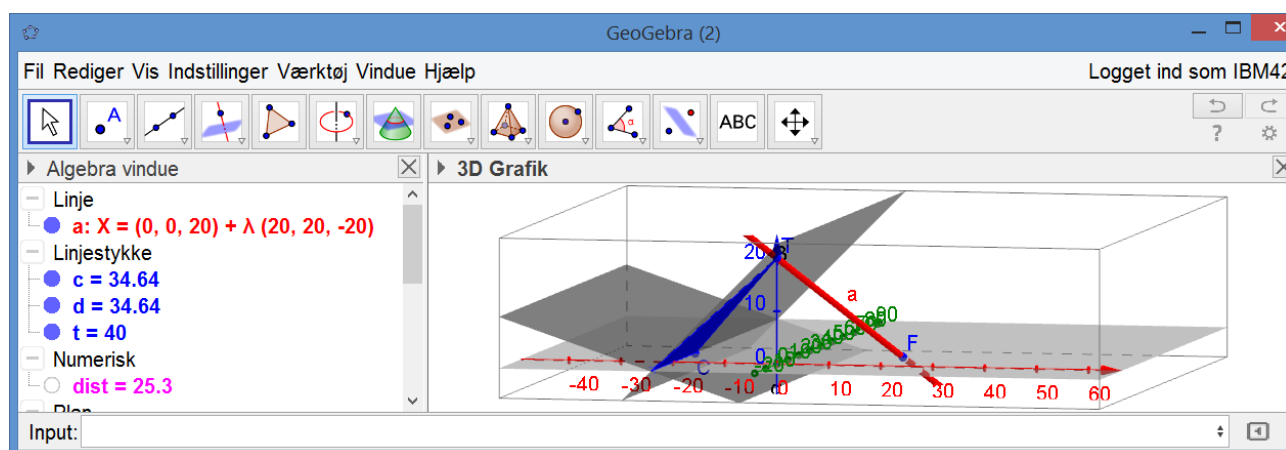
Vinklen findes af GeoGebra som vinklen mellem  $\alpha$  og  $\beta$  (planen bestemt af punkterne  $T$ ,  $D$  og  $C$ .)

Vinklen =  $63,4^\circ$

På figuren næste side ses planerne næsten lige fra siden og sidefladen  $TDC$  anes (blå).



### c1) Parameterfremstilling for linjen gennem $T$ og $F$



Linjen  $a$  tegnes som en ret linje gennem punkterne  $T$  og  $F$ . Parameterfremstillingen kan så aflæses i algebravinduet som:

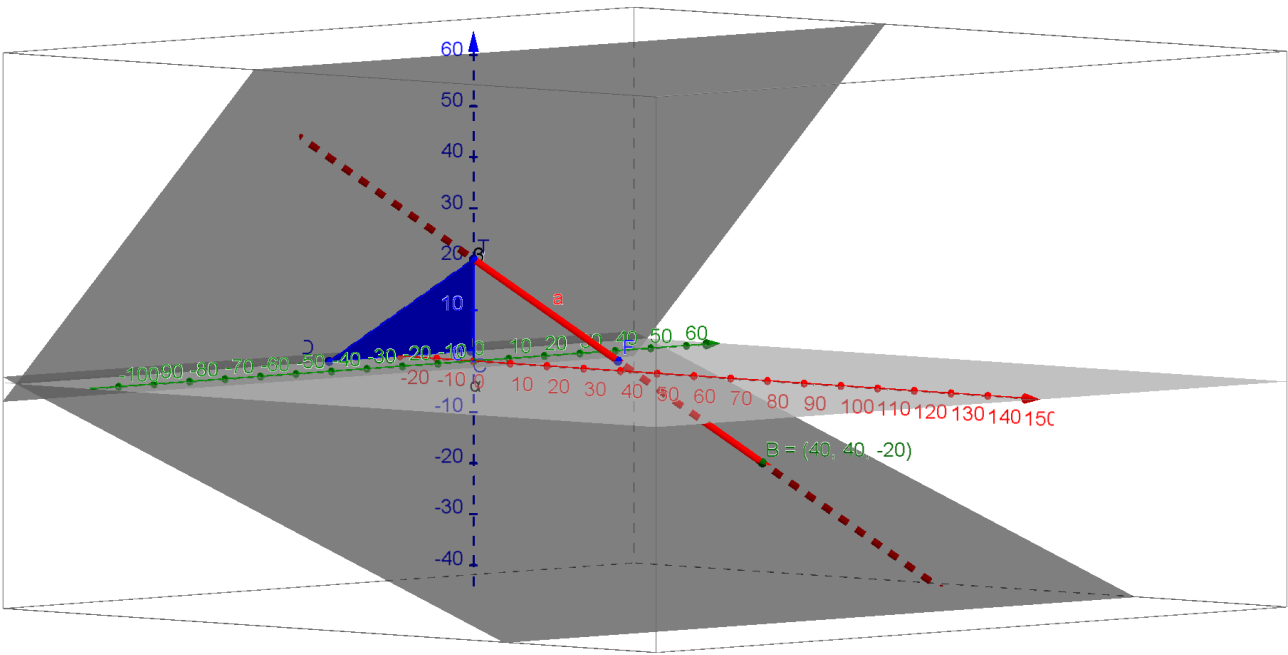
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -20 \end{pmatrix}$$

### c2) Punktet $B$

Idet det forudsættes, at  $B$  ligger på linjen  $a$ , findes  $B$  som skæringspunkt mellem  $a$  og  $\alpha$ .

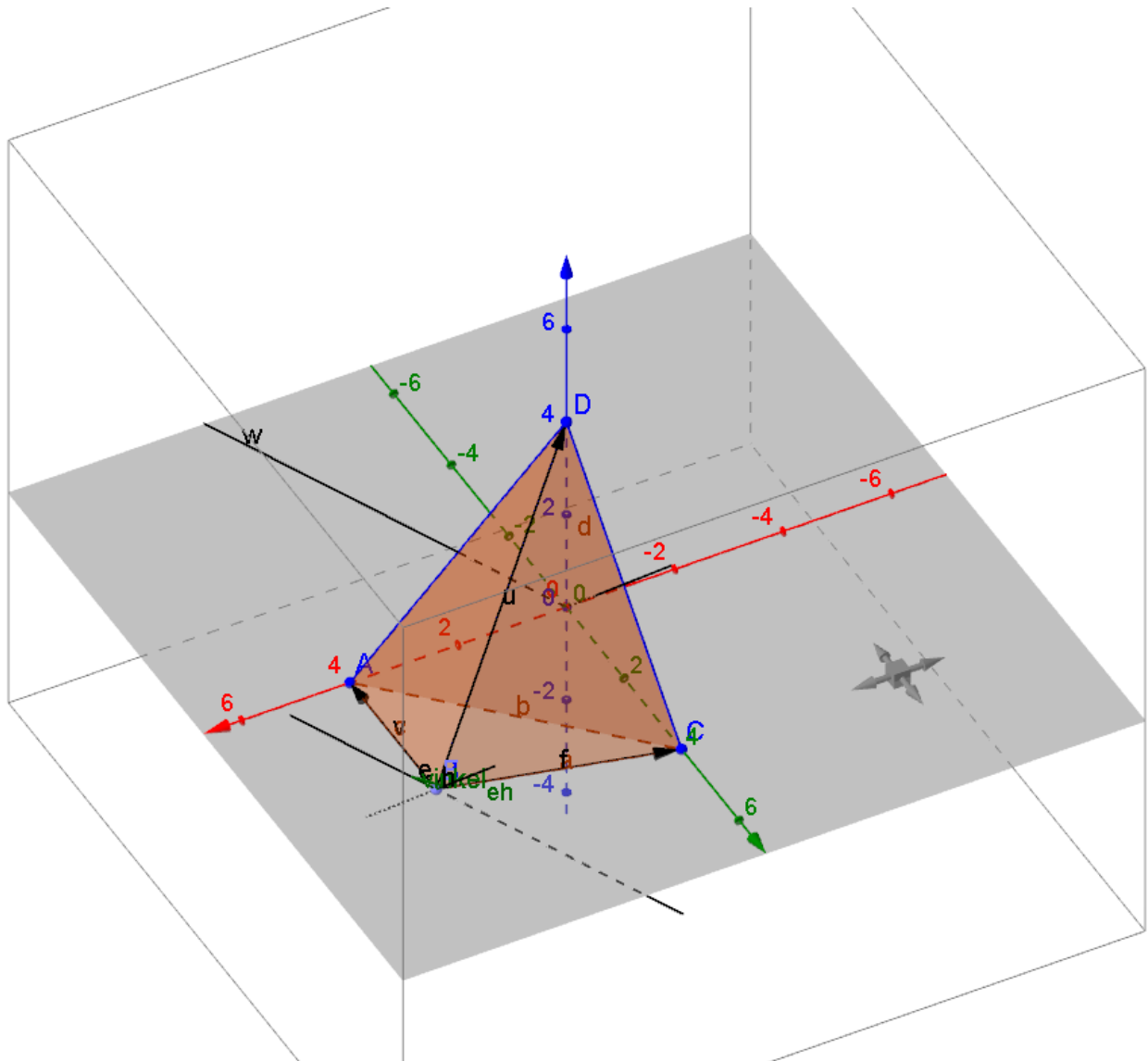
$$B = (40, 40, -20).$$

(Se tegning næste side)



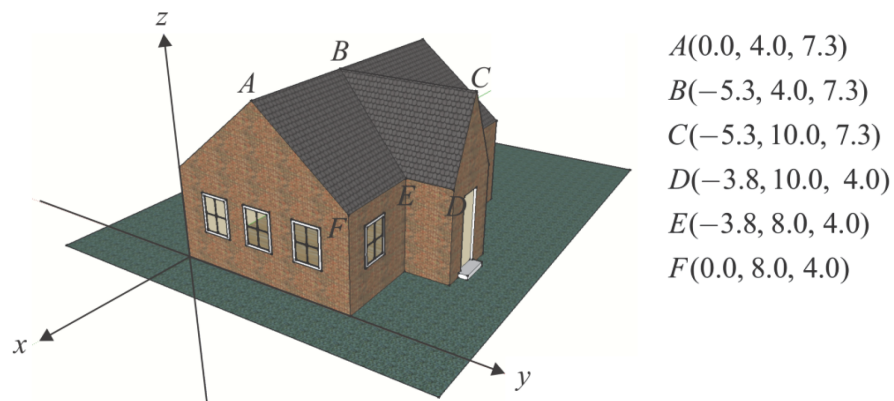


## 3D-opgaver fra årene 2012-13



Løs opgaverne uden hjælpemidler (undtagelsesvis med lommeregner for at finde en vinkel) og derefter med alle hjælpemidler.

Opgave 12



På figuren ses en model af et hus i et koordinatsystem med enheden meter på alle akser.

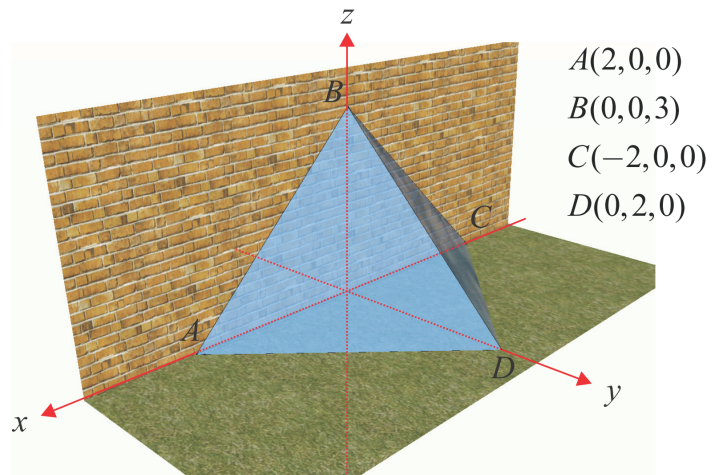
- a) Bestem en ligning for den plan  $\alpha$ , der indeholder tagfladen  $BCDE$ .

Det oplyses, at den plan  $\beta$ , der indeholder tagfladen  $ABEF$ , har ligningen

$$17,49 \cdot y + 21,20 \cdot z - 224,72 = 0.$$

- b) Bestem den spidse vinkel mellem tagfladerne  $BCDE$  og  $ABEF$ .

## Opgave 10



Figuren viser en model af et pyramideformet drivhus bygget op ad en mur. Koordinatsættene for drivhusets hjørner er angivet på figuren. Alle mål er i meter.

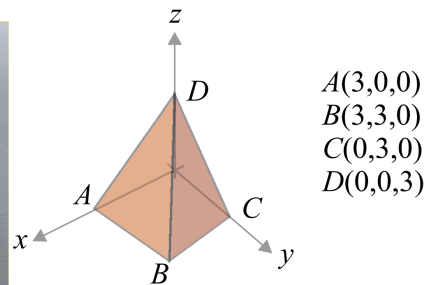
- a) Bestem en ligning for den plan, der indeholder glasfladen  $ABD$ .

Det oplyses, at den plan, der indeholder glasfladen  $BCD$ , har ligningen

$$-3x + 3y + 2z = 6.$$

- b) Bestem vinklen mellem de to glasflader.

**Opgave 10** I et stykke legetøj går det ud på at samle tre pyramider, så de danner en kube. Figuren viser en model af en af de tre pyramider.



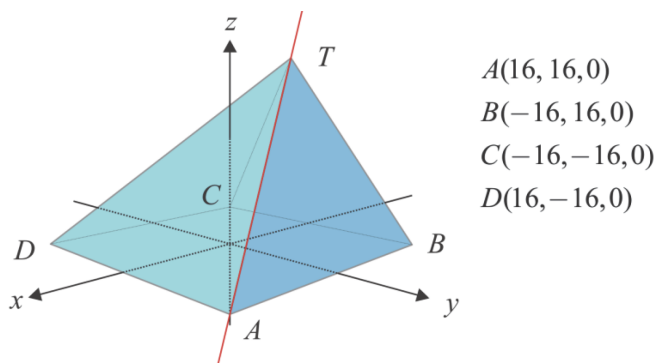
- a) Bestem ligningen for den plan  $\alpha$ , som fladen  $ABD$  er del af.

Det oplyses, at den plan  $\beta$ , som fladen  $BCD$  er en del af, har ligningen

$$y + z = 3.$$

- b) Bestem den spidse vinkel mellem fladen  $ABD$  og fladen  $BCD$ .

## Opgave 13



På figuren ses en skæv glasperamide indtegnet i et koordinatsystem med enheden dm på akserne. Glasperamidens bund er kvadratisk, og koordinatsættene for hjørnepunkterne er angivet på figuren. Pyramidens højeste punkt betegnes  $T$ . Linjen  $l$ , der går gennem punktet  $A$  og punktet  $T$ , har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -27 \\ -16 \\ 23 \end{pmatrix}, \text{ hvor } s \in \mathbb{R}.$$

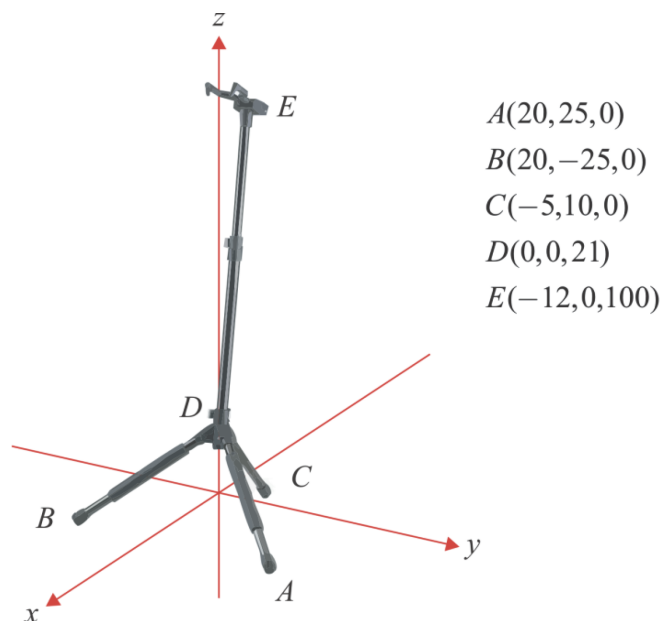
- a) Bestem en ligning for den plan  $\alpha$ , der indeholder glasperamidens sideflade  $ATB$ .

Den plan  $\beta$ , der indeholder sidefladen  $BCT$ , har ligningen

$$23x - 5z + 368 = 0.$$

- b) Bestem koordinatsættet til  $T$ , som er skæringspunktet mellem  $l$  og  $\beta$ .
- c) Bestem den stumpe vinkel mellem  $\alpha$  og  $\beta$ .

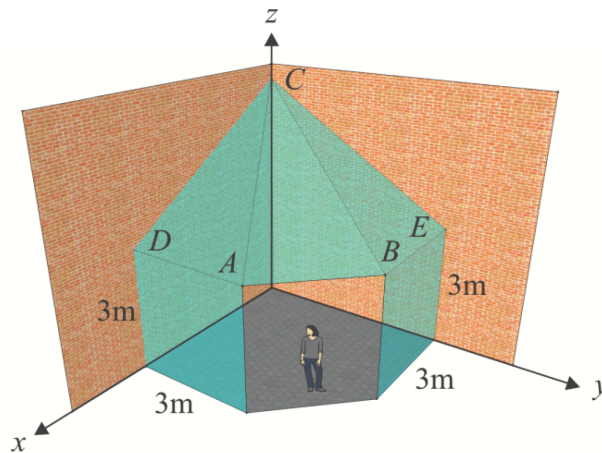
Opgave 14



På figuren ses et guitarstativ indlagt i et koordinatsystem, således at stativets tre fødder ligger i punkterne  $A$ ,  $B$  og  $C$ . I punktet  $E$  er der monteret et gaffelophæng, som guitaren hænger i, således at guitarens krop støtter på de to ben  $AD$  og  $BD$ .

- Bestem en ligning for den plan  $\alpha$ , der indeholder de to ben  $AD$  og  $BD$ .
- Bestem en parameterfremstilling for den linje  $l$ , der går gennem punkterne  $D$  og  $E$ , og bestem den stumpe vinkel mellem  $l$  og  $\alpha$ .

## Opgave 9



$$A(5,3,3)$$

$$B(3,5,3)$$

$$C(0,0,6)$$

$$D(5,0,3)$$

$$E(0,5,3)$$

Figuren viser en model af et vindfang indtegnet i et koordinatsystem, hvor enheden på hver af akserne er meter. Koordinaterne for nogle af vindfangets hjørnepunkter er angivet ovenfor. Vindfangets glastagflader består af tre trekanter, og vindfangets sider består af to kvadratiske glasflader på hver 3m x 3m.

- a) Bestem en ligning for den plan, der indeholder tagfladen  $ABC$ .

Det oplyses, at den plan, der indeholder tagfladen  $ACD$ , har ligningen

$$9x + 15z - 90 = 0.$$

- b) Bestem den stumpe vinkel mellem tagfladerne  $ACD$  og  $ABC$ .
- c) Bestem vindfangets samlede glasareal.

## Stikordsregister

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| Afstandsformler.....                 | 19 |
| Arealsætningen.....                  | 8  |
| egentlig vektor.....                 | 4  |
| Højrehåndsreglen.....                | 8  |
| højresystem.....                     | 4  |
| Linjens parameterfremstilling.....   | 10 |
| normalvektor.....                    | 11 |
| Nulvektoren.....                     | 4  |
| planen, En plan.....                 | 11 |
| prikproduktet.....                   | 5  |
| Projektionsvektor.....               | 6  |
| Regneregler for skalarproduktet..... | 5  |
| Regneregler for vektorproduktet..... | 8  |
| Regneregler, vektorer.....           | 5  |
| retningsvektorer.....                | 11 |
| Skalarprodukt (Definition).....      | 5  |
| Skæringspunkter og -linjer.....      | 12 |
| stedvektor.....                      | 4  |
| Vektorprodukt.....                   | 7  |
| Vinklen mellem vektorer.....         | 5  |
| Vinkler.....                         | 17 |
| Regneregler for vektorproduktet..... | 8  |