

Polynomier



Ikast 2017

Ib Michelsen

Ib Michelsen

Matematik A: Polynomier

Sidst ændret: 31. Januar ca kl 1521

Indholdsfortegnelse

Introduktion.....	5
Andengradspolynomium og andengradsligning.....	7
Definition af et polynomium.....	7
Et eksempel: andengradspolynomiet.....	7
Et polynomiums rødder.....	7
Andengradsligningen.....	8
Eksempler på andengradsligninger.....	9
I: $ax^2 + c = 0$	9
II: $ax^2 + b x = 0$	9
III: $a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$	9
IV: Højresiden $\neq 0$	9
V: Substitution.....	9
Faktorisering af andengradspolynomiet.....	10
Parablen.....	11
Sætning om parabler.....	12
Monotoniforhold.....	13
Parametrenes betydning.....	13
Polynomier: et overblik.....	14
Lige funktioner.....	14
Ulige funktioner.....	14
Entydighedssætningen	14
Divisionsalgoritmer.....	15
Polynomiumsdivision.....	16
Eksempel på division.....	16
Sætning om division med rest.....	17
Sætning.....	17
Sætning.....	18
Sætning.....	18
Sætning: Antal rødder.....	18
Sætning: Antal rødder.....	19
Algebraens fundamentalsætning	19
Eksempel på at finde rødder (med gæt).....	19
Eksempel på at finde rødder (med substitution).....	19
Taylorapproximationer.....	21
En begrundelse.....	22
Definition af glat funktion.....	22
Approximation med andengradspolynomium.....	23
Sætning om restfunktionen.....	23
Du har lært.....	25
Kilder.....	27
Stikordsregister.....	29

Introduktion

Vi omtaler polynomier, fordi det er nogle enkle funktioner, der ofte kan bruges til at modellere forhold i den fysiske verden. Nogle få eksempler på dette demonstreres i øvelserne "Det Matematiske Pendul" og "Toricelli I".

Også vigtigt er det, at ellers komplicerede beregninger af funktionsværdier kan laves uhyre enkelt, hurtigt og nøjagtigt med disse funktioner.

Endelig – vil matematikere hævde – er de interessante i sig selv :-)

Andengradspolynomium og andengradsligning

Definition af et polynomium

Et *reelt polynomium* af en reel variabel er en funktion med en forskrift, der kan skrives på formen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad .$$

Det forudsættes her, at $a_n \neq 0$; polynomiet kaldes så et *n-tegradspolynomium*. Er $n = 0$ og $a_0 \neq 0$ kaldes polynomiet et *nultegradspolynomium*. n kaldes *polynomiets grad*. Er forskriften $f(x) = 0$, kaldes polynomiet *nulpolynomiet* (og dets grad er udefineret (eller evt. $-\infty$)).

Et eksempel: andengradspolynomiet

Andengradspolynomiet har forskriften $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, men oftest skrives forskriften generelt som $f(x) = a x^2 + b x + c$.

Øvelse 1

- Indtast i GeoGebra $a = 1, b = 0, c = 0$ og $f(x) = a x^2 + b x + c$
- Lav en skyder for parameteren a og bevæg den langomt frem og tilbage mellem -5 og 5. Beskriv, hvad der sker med grafen.
- Lav en skyder for c og beskriv, hvad der sker ved ændringer af dennes værdi.
- Beregn $d = b^2 - 4ac$
- Beregn $x_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$ og $x_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$
- Tegn punkterne $A = (x_1, 0)$ og $B = (x_2, 0)$
- Benyt skyderne til at ændre funktionen. Hvilken sammenhæng er der mellem graf og punkter?

Et polynomioms rødder

Et polynomium rødder er løsningsmængden til ligningen $f(x) = 0$

Punkterne A og B , du fandt i øvelse 1, er grafens *skæringspunkter* med x-aksen. Punkternes x-værdier er *polynomiets rødder*.

Vi vil vise, hvorledes man kan finde andengradspolynomiets rødder:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a x^2 + b x + c = 0$$

Som det ses, svarer det til at løse ligningen til højre (kaldet andengradsligningen).

Andengradsligningen

Ligningen: $ax^2 + bx + c = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow 4ax^2 + 4abx + 4ac = 4a \cdot 0 \quad (1)$$

På begge sider af lighedstegnet er der multipliceret med 4 a . Det er tilladt, da vi forudsætter, at $a \neq 0$; ellers var der hverken tale om andengradspolynomium eller andengradsligning.

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + b^2 + 4abx + 4ac = 0 + b^2 \quad (2)$$

I ligningen adderes b^2 til begge sider og $a \cdot a = a^2$

$$4a^2x^2 + b^2 + 4abx + 4ac = b^2 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + b^2 + 4abx + 4ac - 4ac = b^2 - 4ac \quad (3)$$

og $4ac$ subtraheres

$$4a^2x^2 + b^2 + 4abx + 4ac - 4ac = b^2 - 4ac \Leftrightarrow 4a^2x^2 + b^2 + 4abx = d \quad (4)$$

Udtrykket på højreside kaldes diskriminanten, som skrives d . Navnet skyldes, at der diskrimineres (gøres forskel) afhængig af værdien af d . På venstresiden forsvinder $4ac - 4ac$.

$$4a^2x^2 + b^2 + 4abx = d \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = d \quad (5)$$

Venstresiden omskrives v.hj.a. 1. kvadratsætning.

1. Antag, at $d < 0$

I så fald ses det, at venstresiden altid er positiv eller nul, og at ligningen aldrig kan blive sand. Ligningen har ingen løsning eller sagt på en anden måde: løsningsmængden er tom. Det skrives:

$$L = \{\} = \emptyset$$

2. Antag, at $d \geq 0$

$$(2ax + b)^2 = d \Leftrightarrow 2ax + b = \pm \sqrt{d} \quad (6)$$

I disse tilfælde kan kvadratroden beregnes.

$$2ax + b = \pm \sqrt{d} \Leftrightarrow 2ax = \pm \sqrt{d} - b \quad (7)$$

I ligningen subtraheres b på begge sider

$$2ax = \pm \sqrt{d} - b \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} \quad (8)$$

og der divideres med $2a$ på begge sider.

I disse tilfælde fås 1 løsning (eller 2 sammenfaldende løsninger) hvis $d = 0$, og 2 løsninger, hvis $d > 0$. Løsningsmængden kan skrives:

$$L = \{x_1, x_2\} = \left\{ \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} \right\}$$

Øvelse 2

- Følg link <https://www.geogebra.org/m/TmzQYJ2j>
- Løs mange opgaver! Bemærk, at der er altid **påne** løsninger.

Eksempler på andengradsligninger

I: $ax^2 + c = 0$

Når $b = 0$, løses ligningen let idet

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = \frac{-c}{a}$$

Hvis højresiden er positiv eller nul fås løsningerne

$$L = \left\{ -\sqrt{\frac{-c}{a}}, +\sqrt{\frac{-c}{a}} \right\} \text{ og hvis højresiden er negativ, er}$$

$$L = \emptyset$$

II: $ax^2 + bx = 0$

Når $c = 0$, løses ligningen også let idet

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-b}{a}$$

$$L = \left\{ 0, \frac{-b}{a} \right\}$$

III: $a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

Når ligningen som her har en faktoriseret venstreside, giver nulreglen umiddelbart svaret:

$$L = \{\alpha, \beta\}$$

IV: Højresiden $\neq 0$

Andengradsligninger behøver ikke at være så skrevet så pænt som $ax^2 + bx + c = 0$. Der kan nemt optræde led på begge sider af lighedstegnet. I så fald subtraheres led på højresiden fra begge sider. Er der flere led af samme grad, reduceres udtrykket. Som fx:

$$3x^2 - 4x + 7x^2 = 10 + 5x \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 7x^2 - 10 - 5x = 0 \Leftrightarrow 10x^2 - 9x - 10 = 0$$

V: Substitution

I ligninger som $2x^6 - 4x^3 + 2 = 0$ laves substitutionen $y = x^3$; ligningen $2y^2 - 4y + 2 = 0$ løses og for hver løsning y_i løses ligningen $x^3 = y_i$.

Øvelse 3

Løs ligningerne

$$1. \quad (x+4)(x-2)=0$$

$$2. \quad x^2+2x-8=0$$

$$3. \quad 4x-16=-2x^2$$

$$4. \quad (2x+3)^2-1=0$$

$$5. \quad x^6-2x^3+1=0$$

$$6. \quad x^4-x^2-2=0$$

$$7. \quad \begin{array}{l} 2x-7y=-12 \\ -5x+3y=1 \end{array}$$

$$8. \quad (x+7)(x-7)-(2x-3)^2=-49$$

Faktorisering af andengradspolynomiet

Antag, at polynomiet har to rødder (som kan være sammenfaldende): α og β . Så gælder, at:

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} \quad (9)$$

og

$$\alpha \cdot \beta = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{d})^2}{(2a)^2} = \frac{b^2 - d}{(2a)^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{(2a)^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \quad (10)$$

Derfor kan funktionsforskriften omkrives:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a(\alpha\beta) = a(x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta) = a(x - \alpha)(x - \beta) \quad (11)$$

Rødder i normeret andengradspolynomium

At polynomiet er normeret vil sige, at $a = 1$ (og generelt at $a_n = 1$). Antag igen, at polynomiet har to rødder (som kan være sammenfaldende): α og β . Så følger umiddelbart:

$$\alpha + \beta = -b \quad \text{og} \quad \alpha \cdot \beta = c$$

Øvelse 4

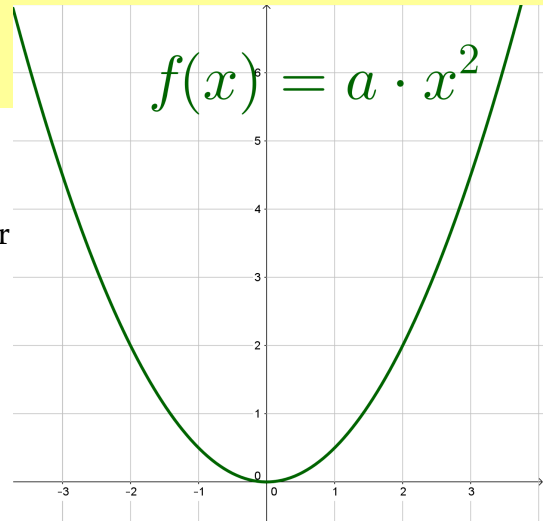
- Gæt på løsningen til andengradsligningen: $x^2 - 7x + 12 = 0$

Parablen

Grafen for et andegradspolynomium kaldes en *parabel*

Punktet på parablen, hvor y-værdien er mindst, når parablens grene vender opad, eller størst, når de vender nedad, kaldes *toppunktet*.

Betragtes polynomier, hvor $b = 0$ og $c = 0$, ses det nemt, at toppunktet $T = (0,0)$. Ligeledes ses det, at f er en *lige funktion*, dvs. at $f(x) = f(-x)$, da $x^2 = (-x)^2$. Det betyder, at y-aksen er en *symmetrilinje* for parablen.



Øvelse 5

- Indtast forskriften for f i GeoGebra, hvor $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
- Skriv i inputfeltet: $u = (0,3)$. Bemærk: det er to tal, der adskilles af et komma. Du får tegnet en lodret pil (kaldet en vektor.)
- Marker i billedmenuen under "Spejl i linje" "Parallelforskyd med vektor".
- Lav så en parallelforskydning ved at klikke på f , dernæst klikke på u .
- Du får så tegnet grafen for funktionen f_1 . Undersøg, hvorledes forskriften har ændret sig sammenlignet med forskriften for f .
- Skriv i inputfeltet: $v = (2,0)$.
- Lav så en parallelforskydning ved at klikke på f , dernæst klikke på v .
- Du får så tegnet grafen for funktionen f_2 . Undersøg, hvorledes forskriften har ændret sig sammenlignet med forskriften for f .
- Lav endelig en parallelforskydning ved at klikke på f_2 , dernæst klikke på u .
- Du får så tegnet grafen for en ny funktion. Undersøg dennes forskrift sammenlignet med forskriften for f .

Sætning om parabler

En vilkårlig parabel, der er graf for funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$, kan fås som en parallelforskydning af grafen for $g(x) = ax^2$, hvor den sidste parabels toppunkt i $(0,0)$ forskydes til den første parabels toppunkt $T = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$. Parablen har linjen $x = \frac{-b}{2a}$ som symmetrilinje

Bevis

Beviset føres ved en omskrivning af forskriften for f :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \Leftrightarrow \quad (12)$$

Omskrivning ved at sætte a uden for en parentes

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \Leftrightarrow \quad (13)$$

Det første kvadrat får et led for meget (sammenlignet med forrige ligning); derfor subtraheres det næste kvadrat.

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) \Leftrightarrow \quad (14)$$

Næstsidste led er beregnet med reglen for brøk multipliceret med brøk, sidste led er forlænget med $4a$.

$$f(x) = a\left(\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{-d}{4a^2}\right) \Leftrightarrow \quad (15)$$

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-d}{4a} \quad (16)$$

Anvendelse af den distributive regel og forkortning.

Heraf ses, at grafen for f er en parallelforskydning af grafen for g . Yderligere ses, at toppunktet T (for f) er:

$$T = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right) \text{ og at symmetrilinjen er flyttet fra } x=0 \text{ til } x = \frac{-b}{2a}$$

Monotoniforhold

Er $a > 0$ er funktionen aftagende til og med x-værdien i toppunktet og voksende fra og med denne værdi.

Er $a < 0$ er funktionen voksende til og med x-værdien i toppunktet og aftagende fra og med denne værdi.

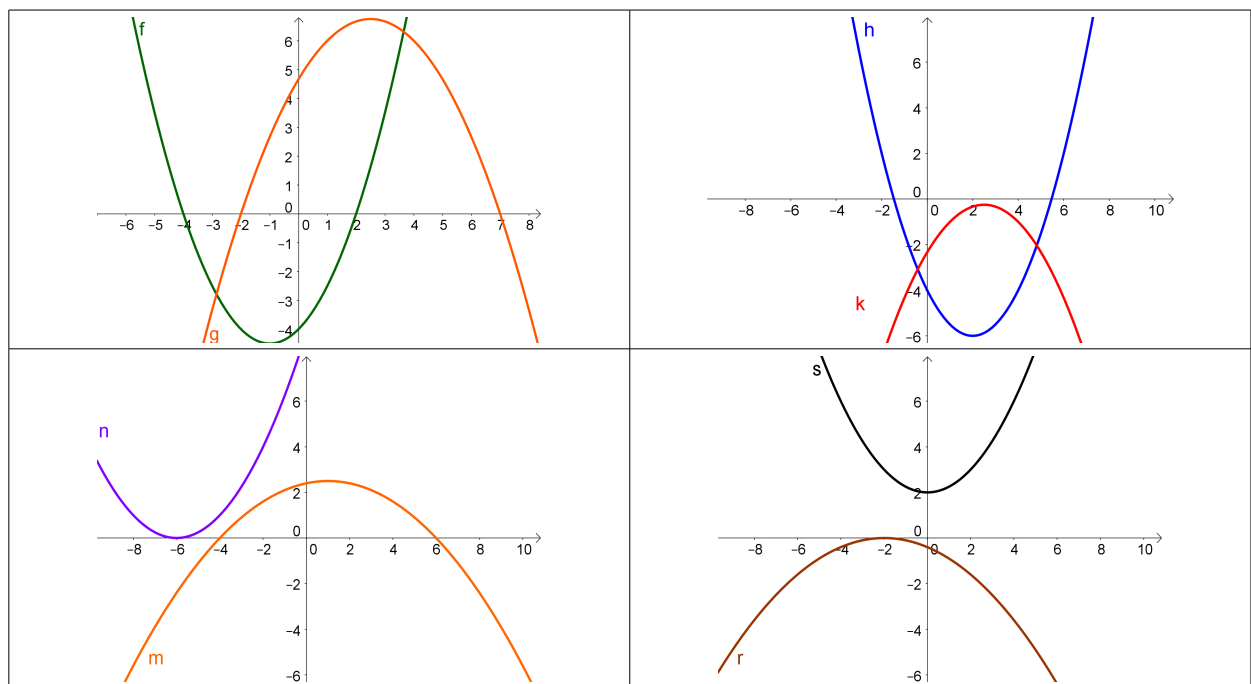
Parametrenes betydning

For funktionen givet ved $f(x) = ax^2 + bx + c$ gælder:

1. $a > 0$ medfører, at parablens grene vender opad, $a < 0$ medfører, at de vender nedad.
2. b er hældningskoefficienten for tangenten til parablen i punktet $(0, c)$. Dette vises senere i Differentialregning.
3. Punktet $(0, c)$ er parablens skæringspunkt med y-aksen.
4. $d > 0$ medfører, at parablen skærer x-aksen i to forskellige punkter, $d = 1$ medfører, at parablen rører (tangerer) x-aksen i et punkt og $d < 0$ medfører at parablen ikke skærer x-aksen.

Øvelse 6

For hver af graferne herunder skal du redegøre for parametrenes og diskriminantens fortegn. (Du kan benytte, at b har samme fortegn som hældningskoefficienten til tangenten i parablens skæringspunkt med y-aksen.)



Polynomier: et overblik

Til højre ses nogle typiske grafer for polynomier fra nultegradspolynomiet (en konstant funktion) øverst til fjerdegradspolynomiet nederst. Bemærk, at der bliver mulighed for flere og flere skæringspunkter med x-aksen. Dog behøver der ikke at være nogen: Fx. i fjerdegradspolynomiet kunne man gøre konstantleddet 8 større, og så ville grafen ikke skære x-aksen.

Lige funktioner

Er $f(x) = f(-x)$ kaldes funktionen en lige funktion

Alle polynomier af typen $f(x) = a \cdot x^{2n}, n \in \mathbb{Z}_0$ er lige funktioner.

Ulige funktioner

Er $f(x) = -f(-x)$ kaldes funktionen en ulige funktion

Alle polynomier af typen $f(x) = a \cdot x^{2n+1}, n \in \mathbb{Z}_0$ er ulige funktioner.

Alle ulige funktioner har mindst et skæringspunkt med x-aksen.

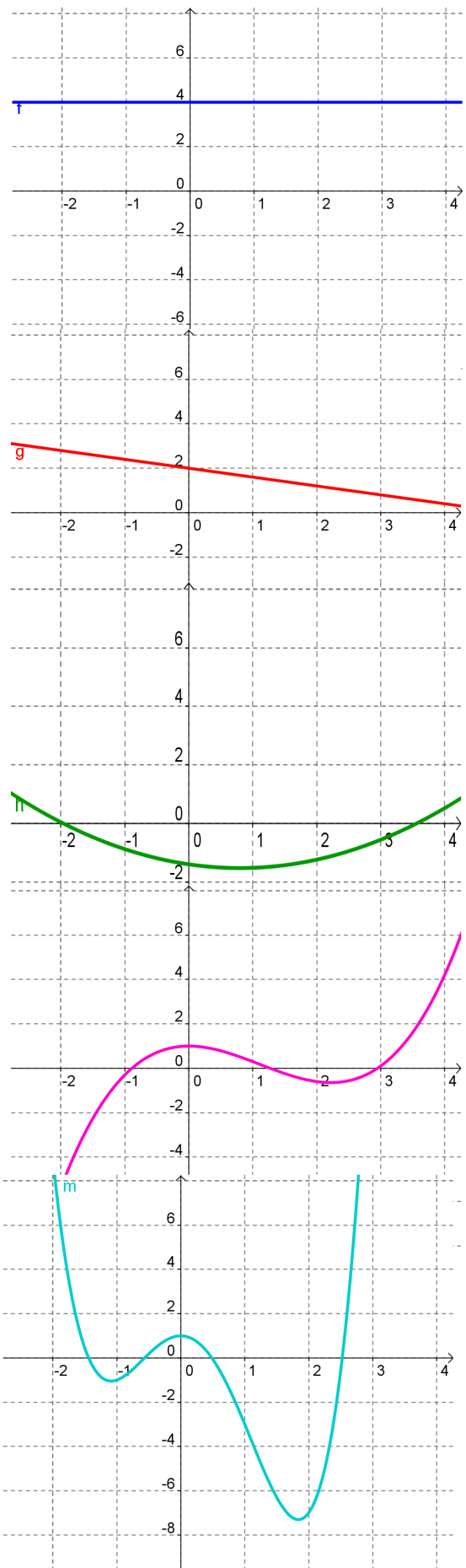
Et polynomium med forskriften

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ er en lige funktion, hvis og kun hvis koefficienterne til led af ulige potenser er nul. Og tilsvarende er det en ulige funktion, hvis og kun hvis koefficienterne til led af lige potenser er nul.

Entydighedssætningen

Hvis to polynomier p og q er identiske, dvs. at $p(x) = q(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$, da er deres koefficienter identiske. Opskrivningen af polynomier er altså entydig.¹

Beviset hviler på, at nulpolynomiet kun kan skrives som en potensfunktion, hvor alle koefficienterne er nul. Et enkelt bevis fås ved at



¹ Sætningen er en direkte følge af en tilsvarende sætning for vektorrum.

vurdere $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) - q(x)$

Divisionsalgoritmer

Hvordan skal børn, der højst kan tælle til 5, dele en stor bunke slik?

De har faktisk nogle metoder:

- Hvert barn kan på skift få et stk. indtil bunken er tom
- Hvert barn kan på skift få 5 stk. indtil bunken er ved at blive tom; derefter kan der deles lidt mindre ud ad gangen.



Det minder lidt om den måde, du har lært at dividere på. Lad os vise et eksempel. Beregn $714 : 3$

Det ses nemt, at resultatet er mere end 200

$$714 : 3 = 200 + ?$$

Hvor meget er nu brugt? $3 \times 200 = 600$!

Og hvor meget til rest? $714 - 600 = 114$!

$$714 : 3 = 200 + ?$$

600

114

Hvor meget skal vi nu dele ud? Ser vi blot på 10'erne er der 11. Dvs., at vi kan fordele 90 med 30 til hver, og få en rest på 24.

$$714 : 3 = 200 + 30 + ?$$

600

114

090

024

Der refterer stadig 24 som fordeles med 8 til hver.

$$714 : 3 = 200 + 30 + 8 = 238$$

600

114

090

024

024

000

Bemærk, at metoden virker - også selvom du uddeler 100 i første omgang til hver af de 3! Eller et skørt tal som 157. Selv 250 kan bruges, hvis du kan regne med negative rester. Det vigtige er, at vi til sidst kan se: $714 = 238 \cdot 3$. Sommetider optræder der en rest. Havde vi skullet beregne $716 : 3$ var svaret 238 med en rest på 2, jævnfør: $716 = 238 \cdot 3 + 2$.

Polynomiumsdivision

Lad der være givet 2 polynomier p og q med grader $n > m \geq 0$. Hvis $p = q \cdot s$ siges divisionen at gå op, hvor p er dividend, q er divisor og kvotienten (resultatet) er polynomiet s .

Eksempel på division

Ligesom ved division med reelle tal skal vi ved division med polynomier gætte på, hvad (en del af) resultatet vil blive, således at resten, der skal fordeles, bliver mindre og mindre. Og det vil vi gøre på en måde, så graden af resten bliver mindre og mindre. Vi skal se, at vi kan fortsætte algoritmen indtil restleddet ihvertfald er en grad mindre end divisors grad. Bemærk, at gættene fås som kvotienten mellem leddene af højeste grad i hhv. dividend (rest) og divisor.

$$(3x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 5) : (x^2 + 1) = 3x^2 - 2x - 2$$

$$\begin{array}{r} -(3x^4 \quad \quad + 3x^2) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x^3 \quad -2x^2 \quad +3x \quad -5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -(-2x^3 \quad \quad -2x) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x^2 \quad +5x \quad -5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -(-2x^2 \quad \quad -2) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +5x \quad -3 \end{array}$$

Første gæt er $3x^2 = 3x^4 : x^2$

Som sædvanlig beregnes, hvor meget "der er fordelt" ved multiplikation af gæt med divisor.²

Den foreløbige rest fundet ved subtraktion

Næste gæt er $-2x^3 : x^2 = -2x$, hvorefter produktet af gæt og divisor findes.

Den foreløbige rest

Næste (og sidste) gæt er -2

Restpolynomiet

Da restpolynomiet har grad 1 og divisor har grad 2, kan vi ikke komme længere. Den oprindelige dividend kan nu skrives som:

$$3x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 5 = (x^2 + 1) \cdot (3x^2 - 2x - 2) + 5x - 3$$

² Her beregnes det "fordelte" og da det skal subtraheres fra den hidtidige rest, sættes det i en minusparentes. Når du laver tilsvarende beregner er det hensigtsmæssigt at skrive det beregnede med de rigtige fortegn foran hvert led. Derefter skrives de modsatte fortegn under hvert fortegn svarende til, at hæve minusparentesen. Derefter kan den nye rest beregnes uden problemer.

Øvelse 7

- På samme måde skal du lave polynomiumsdivision: $(x^2 - 7x + 13):(x - 4)$ og
- $(3x^3 - 5x - 10):(x^2 - 4)$ og
- $(x^3 - x - 6):(x - 2)$ og
- $(3x^4 - 5x^3 - 25x^2 + 45x - 15):(x^2 - 9)$
- Find derefter rødderne i alle dividenderne. (Lav kontrol i GeoGebra.)

Sætning om division med rest

Hvis det ikke er muligt at skrive p (med graden n) som $p = q \cdot s$, (hvor q har graden m) kan man i stedet skrive $p = q \cdot s + r$, hvor s har graden $n - m$ og r har en grad, der er mindre end m . Polynomierne s og r er entydigt bestemt.

Bevis

Beviset gennemføres ikke formelt, men hviler på følgende ide: Første gæt på s fås ved at dividere højstegradsleddene i p og q med hinanden. Denne kvotient er det første led i s og har graden $n - m$. Derefter findes næste led i s ved at dividere højstegradsleddene i $p - qs$ og q med hinanden. Således fortsættes med at føje nye led til s (dvs. s ændres løbende), indtil $p - qs$ har en grad, der er mindre end m . Og da graden af restleddet $p - qs$ hele tiden falder, og da der kan divideres så længe graden af restleddet $p - qs \geq m$, bliver graden af $r < m$.

Sætning

Lad p være et polynomium. Så gælder, at hvis a er rod i p , går $(x - a)$ op i p

Bevis

Antag: a er rod i p

Definer funktionen f som $f(x) = p(x + \alpha)$, idet $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

I hvert af funktionens led skal der beregnes en potens af $(x - a)$ med undtagelse af konstantleddet. Fra alle disse led kommer der ved udregningen en række konstanter, som sammen med det konstante led bliver:

$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = p(\alpha) = 0$, da a er rod. Konstantleddet i f falder altså væk.

Alle andre led vil indeholde potenser af x , hvor eksponenten er mindst 1. Og derfor kan x sættes udenfor en parentes og f skrives om

$$f(x) = p(x + \alpha) = x \cdot g(x)$$

Ved indsættelse af $(x-a)$ i stedet for x , fås

$$p((x-\alpha)+\alpha)=(x-a)g(x-a)\Leftrightarrow p(x)=(x-a)g(x-a)$$

Definer funktionen q som $s(x)=g(x-\alpha)$, og substituer i ovenstående ligning:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot s(x)$$

Det betyder, at $(x-a)$ går op i p (jævnfør definitionen side 16).

Sætning

Lad p være et polynomium. Så gælder, at hvis $(x-a)$ går op i p , er a rod i p .

Bevis

Antag: $(x-a)$ går op i p

Ifølge antagelsen gælder: $p(x)=(x-\alpha)\cdot s(x)$; så er $p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot s(\alpha)=0\cdot s(\alpha)=0$, hvilket betyder, at a rod i p .

Sætning

Lad p være et polynomium og $(x-a)$ en divisor; så vil restleddet r være en konstant og $p(a)=r$.

Bevis

Der gælder umiddelbart

$$p(x)=q(x)(x-a)+r \quad (\text{Se Sætning om division med rest, side 17})$$

Graden af divisor er $m=1$, derfor er r en konstant.

Ved indsættelse af a fås:

$$\begin{aligned} p(a) &= q(a)(a-a)+r \Leftrightarrow \\ p(a) &= q(a)\cdot 0+r \Leftrightarrow \\ p(a) &= r \end{aligned}$$

Sætning: Antal rødder

Et polynomium af n 'te grad kan have op til n rødder.

Det ses nemt af eksemplet herunder:

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-(n-1))(x-n)$$

som er et polynomium af n 'te grad med rødderne $1, 2, 3, \dots, n$. Det er også det maksimale antal rødder, et egentligt polynomium kan have. Nogle polynomier har ingen rødder som fx $f(x)=x^2+1$.

Sætning: Antal rødder

Et polynomium af n 'te grad kan højst have n rødder

Et polynomium med k rødder kan skrives som

$$p(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_{k-1}) \cdot (x - \alpha_k) \cdot q(x)$$

Da højestegradsleddene på begge sider skal have samme grad, må $k \leq n$.

Algebraens fundamentalsætning

Lad $p(x)$ være et n 'te grads polynomium med koefficienter i $\mathbb{C}$ (de komplekse tal). Da har polynomiet n (ikke nødvendigvis forskellige) rødder $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ således at

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Sætningen om antal rødder er indeholdt i fundamentalsætningen: Der skal tilføjes et "højst", da nogle af polynomiets rødder (selv om der udelukkende bruges reelle koefficienter) kan være komplekse tal, og disse medregnes ikke.

Eksempel på at finde rødder (med gæt)

Lad $p(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ og løs ligningen $p(x) = 0$

Du får at vide eller kan måske gætte, at 3 er en rod. Kontroller dette! Så vides, at $(x-3)$ går op i p . Foretag divisionen, før du læser videre.

Som resultat heraf fås, at

$$p(x) = (x-3)(x^2 + x + 1)$$

Funktionsværdien er nul, hvis og kun hvis en af de to faktorer på højre side af lighedstegnet er nul.

Den første faktor er nul, hvis $x = 3$.

Hvornår den anden faktor er nul indses ved at løse den tilsvarende andengradsligning:

Her er $a=b=c=1$ og $d=1-4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$. Dvs., at den anden faktor aldrig kan være nul, og at ligningen kun har den ene løsning: $L=\{3\}$.

Eksempel på at finde rødder (med substitution)

Lad $p(x) = x^6 - 6x^3 + 8$ og løs ligningen $p(x) = 0$

Erstat midlertidigt x^3 med y . Så kan ligningen skrives:

$y^2 - 6y + 8 = 0$, men det er jo en almindelig andengradsligning, som har løsningerne 2 og 4. Kontroller dette.

Dvs. at enten er $x^3 = 2$ eller $x^3 = 4$. Derfor er $L = \{\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$

Øvelse 8

- Løs ligningerne herunder:
- $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ (Gæt først en rod med kontrol)
- $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$, idet det oplyses, at en af rødderne er $1/2$
- $x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 18x - 14 = 0$, idet det oplyses, at 2 er en dobbeltrod
- $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$
- $x^6 + 5x^3 - 36 = 0$

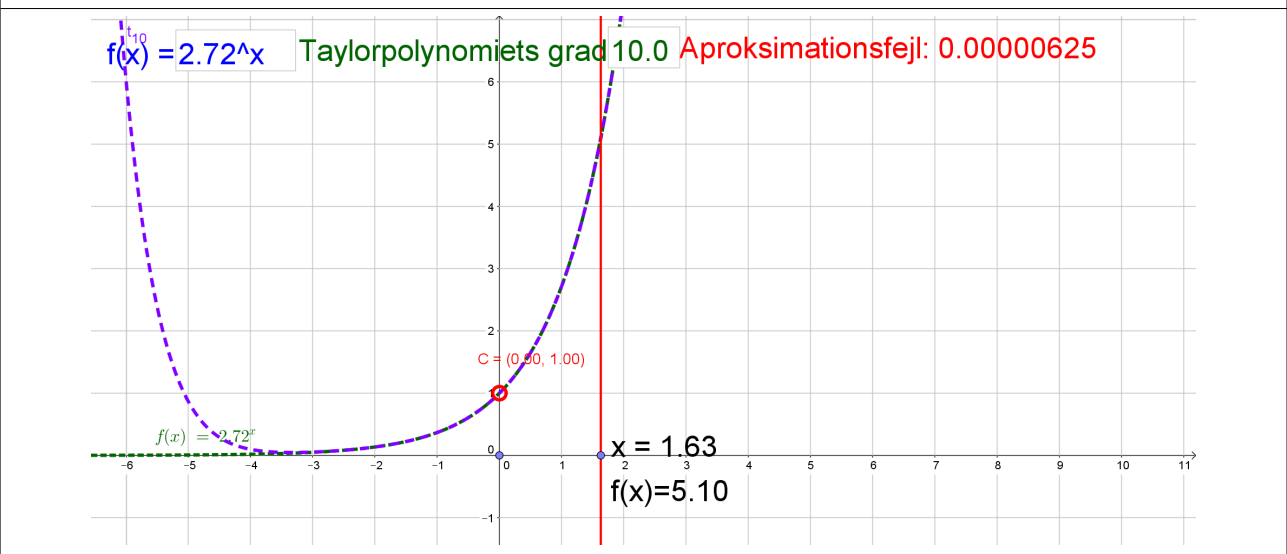
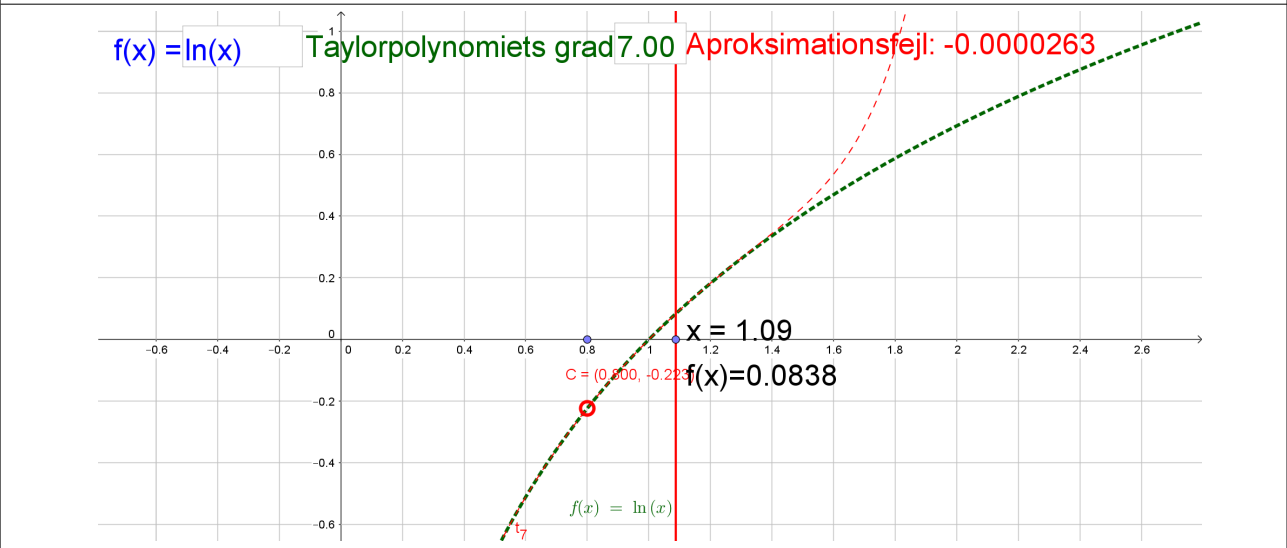
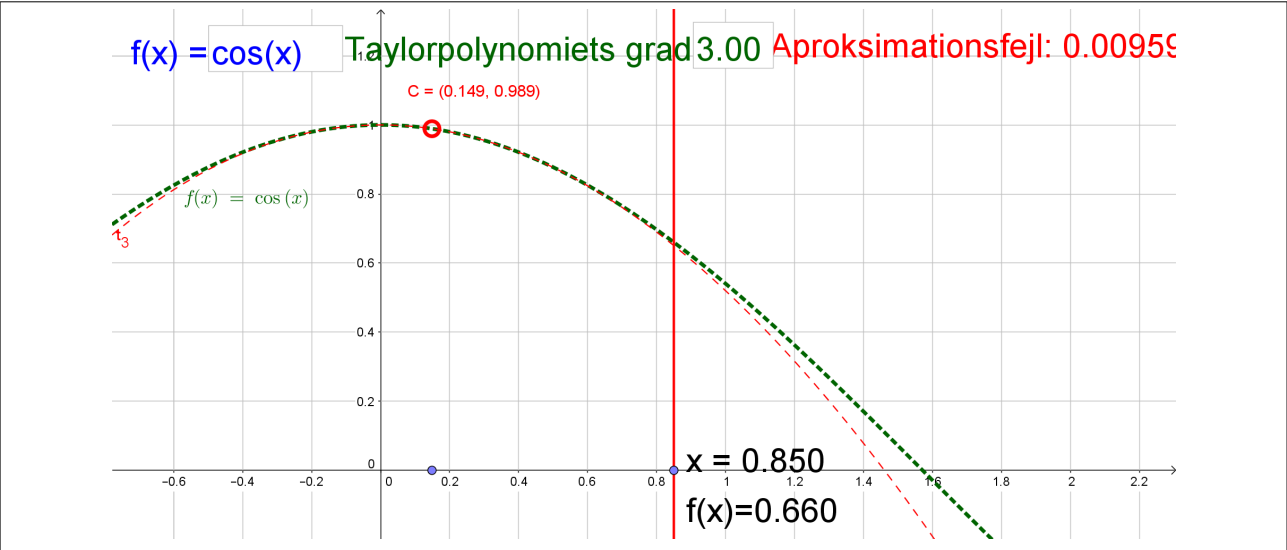
Øvelse 9: *Det matematiske pendul* (Gruppeopgave / klasseopgave)

- Beskriv: Hvad er et matematisk pendul
- Lav et matematisk pendul med en omtrentlig pendullængde aftalt med læreren
- Påvis, at svingningstiden er ligefrem proportional med antallet af svingninger. En svingning er bevægelsen fra lodret frem og tilbage og frem til lodret igen.
- Beregn svingningstiden for den givne pendullængde.
- Saml klassens målinger og find pendullængden som en funktion af svingningstiden ved regression. Benyt i GeoGebra: FitPoly[liste,2].

Øvelse 10: *Toricellis lov I*

- Antag at Toricellis lov gælder ($v(t) = \sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)}$); loven kan bl.a. beskrive udstømningshastigheden (v) af vand der sprøjter ud af et højt cylinderglas med en åbning forneden. Til tiden t er vandstanden over åbningen $h(t)$. $g = 9,82$ er tyngdeaccelerationen) på det pågældende sted.
- Lad $h=0,5$ på et givet tidspunkt; i det følgende regnes tiden som sekunder efter dette tidspunkt. Det forudsættes, at vandstrålen starter som en vandret bevægelse og at luftmodstanden ingen rolle spiller. Beregn længden af en vanddråbes vandrette bevægelse i løbet af t sekunder $x(t)$ og beregn den lodrette bevægelse i løbet af t sekunder $y(t)$ forårsaget af tyngdekraften.
- Find t som en funktion af x i den første funktion og indsæt denne funktion i den lodrette bevægelse. Hvilken sammenhæng er der mellem x og y ?
- Antag nu, at vandstrålen danner vinklen α med vandret. Hvorledes skal de hidtidige funktioner rettes. (Besvar hele opgaven forfra.)

Taylorapproximationer



Øvelse 11

- I GeoGebra tegnes grafen for funktionen $\sin(x)$
- Lad $O = (0,0) = (0, \sin(0))$
- Tegn tangenten i O
- Lad $a = 0,5$ og tegn linjen $x = a$
- Lad A og B være skæringspunkter med hhv. grafen og tangenten
- Beregn differensen $d = y(B) - y(A)$
- Lav en skyder for a , og indstil egenskaberne: Min = 0, maks = 1,6, Tilvækst = 0,0001, Bredde = 1000 px
- Undersøg i hvilket interval (indeholdende 0) $|d| < 1/10.000$
- Hvad kan man bruge det til?

En begrundelse

Nogle funktioner kan det være besværligt at beregne nøjagtige funktionsværdier for. Selvom grækerne havde deres kordetabeller, må nøjagtigheden have været begrænset. Så når vi lynhurtigt vil have beregnet $\sin(0,35789)$ med 15 decimaler (eller flere), hvad gør vi så?

Vi bruger Taylorrækker!

Ideen er at finde polynomier, der i hvert fald i et interval har næsten de samme funktionsværdier, som sinusfunktionen eller hvilken anden funktion, vi nu vil finde funktionsværdier for.

Og tangenten, der blev undersøgt i den foregående øvelse, er netop eksemplet på en graf for førstegradspolynomiet, der i et lille interval kan give ret nøjagtige værdier for sinusfunktionen.

Definition af glat funktion

En glat funktion er en funktion, hvor den n 'te afledte³ ($f^{(n)}(x)$) eksisterer for ethvert naturligt tal n for alle x i et åbent interval.

Eksempler på glatte funktioner er: de trigonometriske funktioner, eksponentielle funktioner, logaritmefunktionen, polynomier og hyperbolske funktioner.



Brook Taylor [FRS](#) (18 August 1685 – 29 December 1731) was an English mathematician who is best known for [Taylor's theorem](#) and the [Taylor series](#).

³ Betydningen af begrebet uddybes om nogle måneder i Differentialregning.

Approximation med andengradspolynomium

Lad der være givet en glat funktion f , som vi ønsker at approksimere med polynomiet g ,
 $g(x) = a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c$. x_0 kaldes *udviklingspunktet*.

Vi ønsker at fejlen eller differensen mellem funktionsværdier ($f(x) - g(x)$) er så lille som muligt og derfor stille følgende krav: I x_0 skal differensen være 0, tangenthældningen skal være 0 og også den anden afledte skal være 0. Derfor fås:

$$f(x_0) - g(x_0) = f(x_0) - a(x_0 - x_0)^2 - b(x_0 - x_0) - c = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - c = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = c \quad (17)$$

$$f'(x_0) - g'(x_0) = f'(x_0) - a \cdot 2(x_0 - x_0)^1 \cdot 1 - b \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - 1 \cdot b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{f'(x_0)}{1} \quad (18)$$

$$f''(x_0) - g''(x_0) = f''(x_0) - a \cdot 2 \cdot 1(x_0 - x_0)^0 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow f''(x_0) - a \cdot 2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{f''(x_0)}{1 \cdot 2} \quad (19)$$

Hermed er det approksimerende polynomium⁴ bestemt således at resten eller differensen er meget lille i nærheden af x_0 .

Fuldstændigt tilsvarende kunne vi have bestemt et n 'tegradspolynomium, hvor vi

bemærker, at $f^{(n)}(x_0) = a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = a_n \cdot n! \Leftrightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ ⁵

Sætning om restfunktionen

Idet forskellen mellem den approksimerede og den approksimerende funktion kaldes $R(x)$, gælder

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1},$$

hvor $\xi(x)$ er en funktion med funktionsværdier mellem x og x_0 .

⁴ Det lille mærke, der optræder efter funktionens navn, fortæller at der er tale om en ny funktion, der beskriver tangenthældningerne for den oprindelige funktion. f' kaldes den afledte funktion. I emnet Differentialregning, som vi snart kommer til, uddybes betydningen.

⁵ $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$

Øvelse 12

- I GeoGebra indstilles Afrunding til 4 decimaler.
- I regnearket skrives overskrifterne i 1. række: Radianer (A1), sin (B1), p0 (C1), p1 (D1), p1 (E1), p3 (F1) og p5 (G1)
- Under Radianer skrives vinkelmålene 0,0, 0,1, ... , 0,5
- Under sin skrives de tilsvarende sinusværdier (beregnet med sinusfunktionen).
- Under de resterende overskrifter laves sinusberegninger beregnet med Taylorapproximationer.
- Marker celler med rødt, hvis approksimationen ikke har de to første decimaler rigtige, med lys gult, hvis de ikke er helt som i B-kolonnen.

Du har lært

- Hvad et polynomium er
- Betydningen af parametrene i forskriften
- Formler for toppunkt og skæringspunkter
- Det typiske udseende af nogle polynomier
- Hvorledes en andengradligning løses og de sætninger, løsningen baseres på
- Hvorledes rødder i andre polynomier evt kan findes
 - Anvendelse af nulregel
 - Anvendelse af substitution
- Division af polynomier og sætninger herom
- Hvorledes visse funktionsværdier kan beregnes ved approksimation

Kilder

Kirsten Rosenkilde: "Polynomier, august 2013"

<http://www.georgmohr.dk/noter/polynomier2013.pdf>

16.1.2017

Torben Rønne: "Polynomier", Skive, privat udgivelse, 2017

Sebastian Ørsted: "Polynomier, rødder og division"

<http://home.math.au.dk/sorsted/poly.pdf>

16.1.2017

Stikordsregister

aftagende.....	13
Andengradsligningen.....	8
Approksimation.....	23
Det matematiske pendul.....	20
Entydighedssætningen.....	14
Faktorisering.....	10
finde rødder (med gæt).....	19
finde rødder (med substitution).....	19
glat funktion.....	22
gå op.....	16
lige funktion.....	11
Lige funktioner.....	14
Monotoniforhold.....	13
n-tegradspolynomium.....	7
n'te afledte.....	22
normeret andengradspolynomium.....	10
nulpolynomiet.....	7
nultegradspolynomium.....	7
Parablen.....	11
polynomiets grad.....	7
polynomiets rødder.....	7
polynomium.....	7
Polynomiumsdivision.....	16
reelt polynomium.....	7
rødder.....	7
skæringspunkter.....	7
Substitution.....	9
symmetrilinje.....	11
Taylorapproksimationer.....	21
toppunktet.....	11
Toricellis lov I.....	20
tyngdeaccelerationen.....	20
udviklingspunktet.....	23
Ulige funktioner.....	14
voksende.....	13

Taylor-made polynomials

