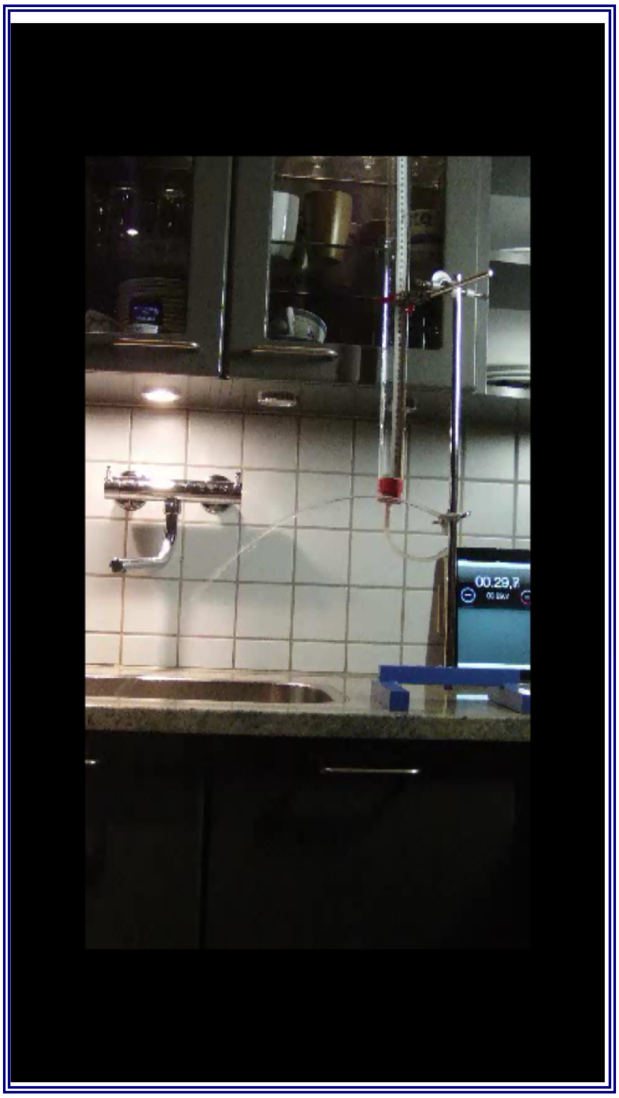
Modellering



Ib Michelsen

2013

Matematisk modellering [1]

indeholder en række elementer, der er i spil alt afhængig af den konkrete sag:

- For det første må der ske en afgrænsning og sproglig beskrivelse af det problem eller den situation, der skal modelleres. Dernæst skal der foretages en oversættelse fra naturligt sprog til matematisk sprog af de objekter, fænomener, relationer mv., der er i spil: Der indføres numeriske variable som tid, vægt, koncentration og alder og kategoriale variable som køn, ansættelse, nationalitet og institutionstype. Et billede af virkeligheden repræsenteres ved en matematisk figur, en forandring i tid repræsenteres ved en differentialkvotient osv. Denne *matematisering* foregår på flere niveauer og kan ofte med fordel ske i et samarbejde med andre fag.
- Oversættelse af den oprindelige komplekse situation eller problem til et matematisk problem vil altid ske gennem idealiseringer, abstraktion, antagelse af bestemte forudsætninger osv., dvs. der er sket et *informationstab.* Der kan være *bias* (systematiske fejl) i en indsamlet stikprøve.
- Når dette er givet en matematisk form, så anvendes de relevante matematiske metoder til at behandle den matematiske model og løse de matematiske problemer, der nu er formuleret. Første trin vil ofte være deskriptive og grafiske metoder, der repræsenterer materialet i en form, hvor-fra man kan stille yderligere spørgsmål.
- Og endelig sker der en *validering* af den matematiske model ved at oversætte tilbage fra det matematiske sprog til det oprindelige og bedømme holdbarheden af de matematiske resultater. Ved at inddrage andre fag kan man med større sikkerhed svare på, om resultaterne er holdbare eller kan forklares med *skjulte variable* (konfundering) eller med en stor usikkerhed i forsøgs-opstillingen mv.
- Gennem en *kommunikation* med andre fag skal der således ske en kritisk analyse af modelbygningen og af modellens holdbarhed og gyldighed.

Et eksempel: En fodboldbane

Lad der være givet en fodboldbane med fintklppet græs og hvide kalkstriber som afgrænser banen. Den vil ofte blive kaldt "et rektangel", men det er den ikke: Rektanglet er en matematisk model med sine rette vinkler og linjer uden bredde i et plan. Rektangler findes kun som idealforestillinger i hovedet på matematikere; heller ikke den mest omhyggeligt udførte tegning af et rektangel er et rigtigt rektangel. Selv den tyndeste linje har en bredde, selv den vinkel, der er tegnet efter alle kunstns regler som ret, har en lille afvigelse osv.

Men vi kan sige, at et matematisk rektangel kan bruges som model for en fodboldbane. Med kendskab til fx sidelængder kan rektanglets omkreds og areal beregnes i modellen – og disse resultater kan så overføres til fodboldbanen.

Hvor anvendelige resultaterne er, afhænger både af, hvor stor afstanden mellem virkelighed og model er, og hvor stort behovet for nøjagtighed er.

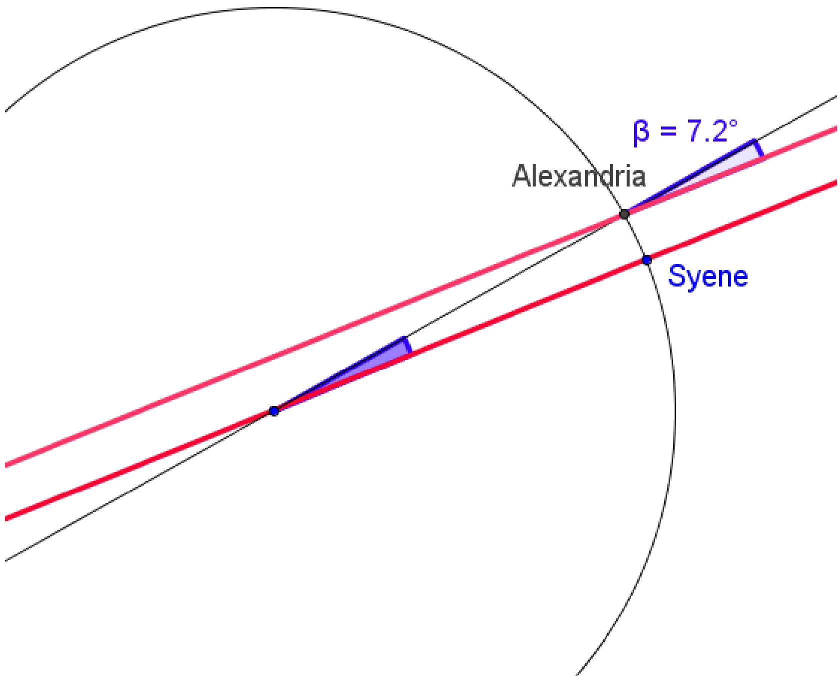
---

1 http://www.uvm.dk/Uddannelser-og-dagtilbud/Gymnasiale-uddannelser/Studieretninger-og-fag/Studentereksamen-%28stx%29/~/media/UVM/Filer/Udd/Gym/PDF10/Vejledninger%20til%20laereplaner/Stx/100806_vejl_matematik_B_stx.ashx (Delvist citat fra afsnit 5.7)

Geometriske Modeller

Jordens omkreds (Eratosthenes)

Eratosthenes (240 FVT.) opnåde berømmelse for sin vurdering af jordens omkreds. Hans argumenter var:



- På en bestemt dag stod solen lodret over Syene; samtidig kunne Erastostenes i Alexandria måle vinklen mellem lodret og en linje til solen som 1/50 af en hel cirkel.
- Alexandria ligger stik nord for Syene, altså på samme meridian.
- Afstanden mellem Alexandria og Syene blev opmålt til 5000 stadier
- Denne afstand (buelængden) er ligefrem proportional med centervinklen (som er den samme som den målte β, da lysstrålerne forudsættes at være parallelle)

Derfor beregnes jordens omkreds (over polerne) til 50x5000 stadier = 250.000 stadier eller godt 40.000 km [2]

❖ Hvordan ville du praksis måle β?

2 Argumentationen er rigtig, men forudsætningerne halter en lille smule: Solen har ikke stået præcist lodret over Syene og Alexandria ligger ikke præcist N for Syene, men den største fejlkilde har været den unøjagtige bedømmelse af afstanden mellem de to byer. Yderligere mangler vi præcis viden om forholdet km/stadier. Desuden er solen jo ikke et punkt, og den har en endelig afstand til jorden.

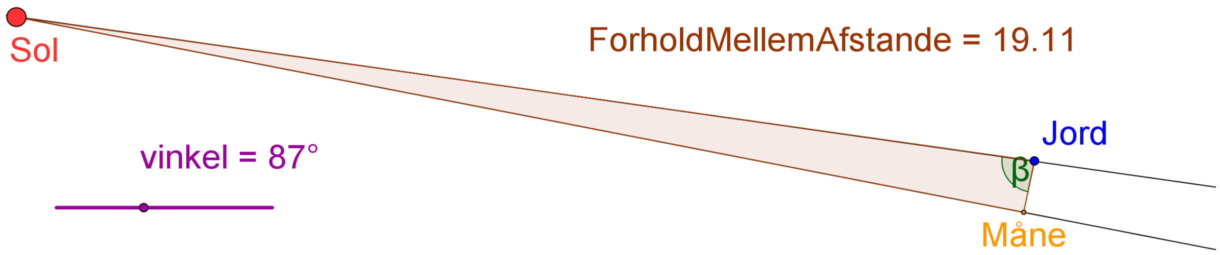
Kugle eller pandekage?

Eratostenes går ud fra, at jorden er rund. Før ham har der ikke været almindelig enighed herom. Dog kan det ikke have været en fjern tanke, fordi det - i modsætning til den flade model - kan forklare:

hvorfor ser sømanden, der er på vej mod land, først bjergets top?

hvorfor er jordens skyggebillede ved måneformørkelse altid cirkulært - en skiveformet jord ville oftere lave et elliptisk skyggebillede?[3]

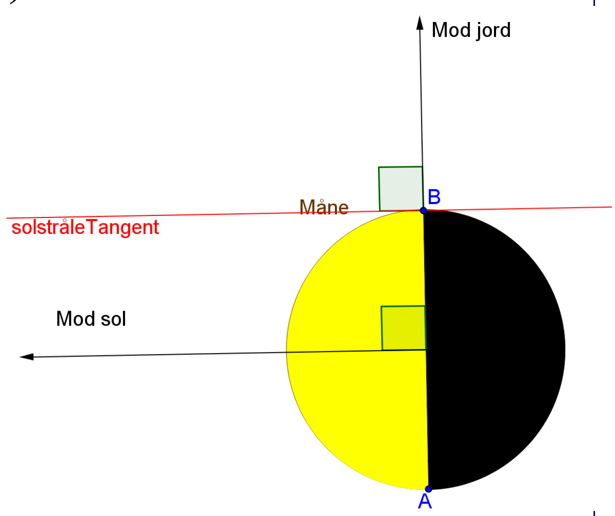
Aristarchos jord-sol-måne model



Aristarchos (310 - 230 fvt.) er (måske) den første med et heliocentrisk verdensbillede: i stedet for at have jorden som verdens centrum sætter han solen i centrum.
Aristarchos vil tegne et Himmelkort, hvor jord (J), sol (S) og måne (M) er punkter. Kortet er naturligvis en formindsket udgave af den virkelige himmeltrekant. Han kender ikke nogen af siderne i himmeltrekanten: dvs. de virkelige afstande mellem himmellegemerne. Men derfor kan han alligevel godt tegne et kort; han mangler blot at kunne angive et målestoksforhold (eller en formindskelsesfaktor.) For at kunne tegne kortet, skal han lave en trekant, der er ensvinklet med himmeltrekanten, og dertil behøver han blot at kende to af dennes tre vinkler.
Den første er nem at få: fra jorden kan man nemt få sigtelinjer til både sol og måne, og derefter måle vinklen mellem linjerne.
Aristarchos havde ingen ven på månen, han kunne ringe til for at få målt den tilsvarende vinkel der. Men han fik en genial idé: når vi på jorden har halvmåne, må det være fordi:

- solstrålen, der netop strejfer månen i B, er en tangent til månen
- solstrålen står derfor vinkelret på diameteren AB
- og Aristarchos må befinde sig i forlængelse af diameteren AB fordi
    - bevæger han sig mod solen, vil

Kort over Månen (hvor sol og jord ligger i same plan)



3 http://en.wikipedia.org/wiki/Flat_Earth

måne blive mere fuld og
- bevæger han sig væk fra solen, bliver den mindre fuld.

Derfor behøvede Aristarchos kun at måle én vinkel, men den skulle måles præcis i det øjeblik, der er halvmåne. Det forsøgte Aristarchos, og han kom til resultatet 87°. Derfor kunne han tegne tegningen øverst på siden og beregne forholdet mellem tegningens afstande til sol og måne. På tegningen kan aflæses, at sættes $|JM| = 1$, er $|JS| = 19{,}11$. For at få virkelighedens mål, skal disse størrelser ganges med et ukendt k, således at de rigtige afstande er hhv. k og $19{,}11 \cdot k$. Forholdet mellem afstandene til sol og måne fås så som:

$$Afstandsforholdet = \frac{19{,}11 \cdot k}{k} = 19{,}11$$

Dermed kunne Aristarchos fastslå, at solen både er langt længere væk end månen og følgelig også langt større! selv om de ser lige store ud.
Aristarchos måling var unøjagtig, så selv om metoden er rigtig et langt stykke ad vejen, fik han et resultat for k, som ligger langt fra det resultat, vi har i dag: $k = 389$. Solen er altså langt, langt længere væk end månen.
Grunden til den voldsomme fejl er en lille fejl i vinkelmålingen, som nok især skyldes, at halvmåne har man ikke en hel dag, men kun et øjeblik. Månen bevæger sig jo hele tiden rundt om jorden (samtidig med at jorden bevæger sig rundt om solen) og derfor ændrer vinklen, der skal måles, sig hele tiden.
Ved at følge dette link til http://mimimi.dk/c/halvMaane.html, kan du se en model, der demonstrerer, hvad små ændringer af vinklen gør mht. forholdet.

Målebordsblade som modeller af landskabet

Samtidigt med trianguleringen (se næste kapitel) blev landet opmålt og tegnet på **målebordsblade**. Det var meget detaljerede kort i målestokken 1:20.000. De fik en ganske lang levetid under forskellige myndigheder. I hvertfald solgtes de stadig i boghandlen efter 1970 som fx M 2108 Finderup, opmålt 1877, rettet 1954, trykt i Köbenhavn 1964 ved Geodætisk Institut.

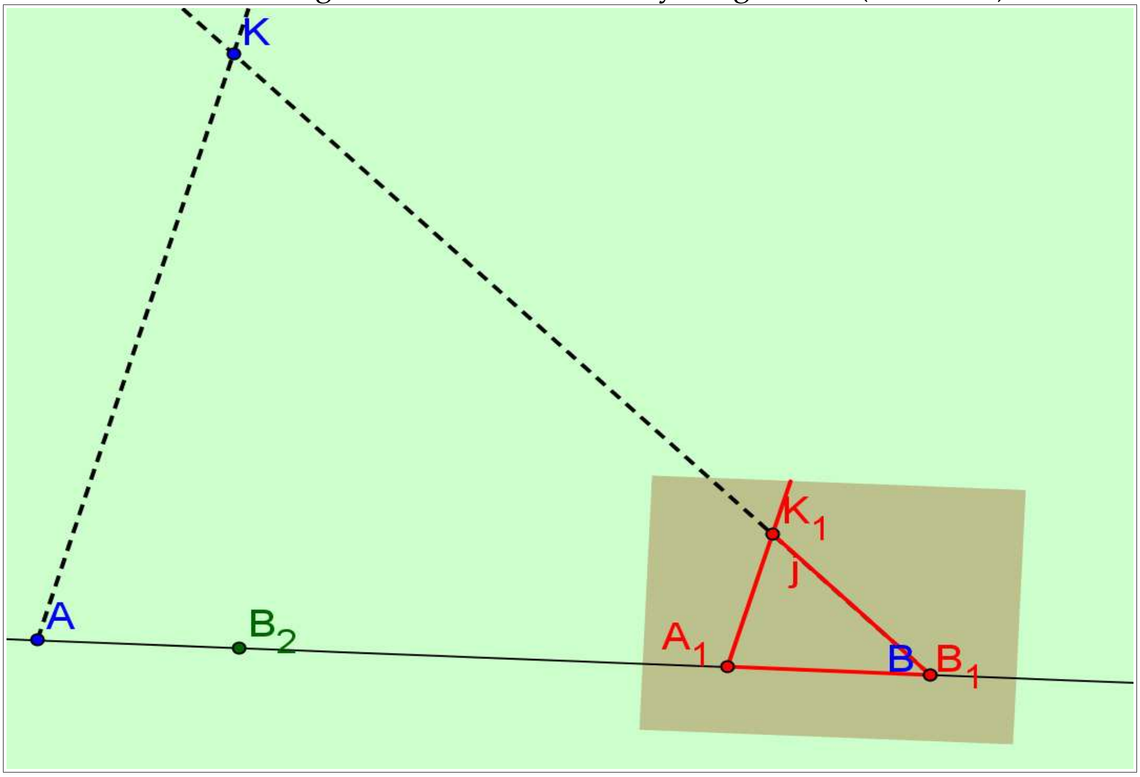
Det var teknikken ved fremstillingen, der gav dem navn. En lidt forenklet gengivelse af denne er: Man benytter et bord, hvor det kommende kort fastgøres. 2 punkter (hvorfra der er en vis udsigt) A og B i naturen udvælges, afstanden mellem dem måles, og punkterne overføres til kortet med en tilsvarende (meget mindre) afstand mellem de tegnede punkter: lad os kalde dem A_1 og B_1.

Bordet stilles så op: først ved fx A med kortets A_1 præcist over A og linjen A_1B_1 lige over en del af AB.

Andre punkter i landskabet lægges ind ved at tegne sigtelinjer fra A_1 (A) på papiret sigtende fx mod et kirkespir K. Når et passende antal sigtelinjer mod vigtige punkter er indlagt, flyttes bordet til B med B_1 lige ovenover B og linjen A_1B_1 lige over en del af AB.

Når der så herfra blev tegnes en sigtelinje mod K (eller andre punkter), dannes der to ligedannede trekanter: ABK i naturen og $A_1B_1K_1$ på kortet. Med tilpas mange støttepunkter kan den rutinerede kartograf indtegne øvrige detaljer på fri hånd.

Herunder er vist det rektangulære målebord efter flytningen til B (i naturen).



Da A_1 lå over A (og B_1 lå over punktet i naturen markeret B_2), blev den røde sigtelinje tegnet fra A_1 til K_1 . Nu er B og B_1 sammenfaldende Der tegnes så en ny sigtelinje, og K_1´s position findes i skæringspunktet. Tilsvarende indtegnes alle andre punkter.

Opgave

Antag, der også var en mølle M i landskabet og at den er tegnet ind på kortet som M_1. Gør rede for, at forhold mellem alle afstandene på kort og de tilsvarende i naturen er de samme. Vis altså:

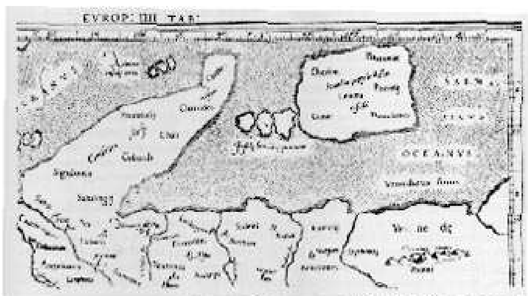
$$\frac{|K_1 M_1|}{|KM|} = \frac{|A_1 B_1|}{|AB|}$$ [4]

Danmarkskort

Som det allerede er nævnt, betyder geometri jordmåling og resultaterne benyttes til at tegne kort. Kort er og var vigtige. Formålet med at have dem kunne fx være at finde vej eller at fastlægge skel mellem ejendomme eller at beregne ejendommes størrelse.

I Danmark skyldes de ældste kort optegnelser gjort af Ptolemæus fra Alexandria ca. 200 EVT. Selve kortet er dog tegnet væsentligt senere.

Det ældste Danmarkskort



Kort tegnet efter optegnelser fra Ptolemæus af Alexandria, 200 E.V.T.

4 Se: Euklid, VI, sætning 2

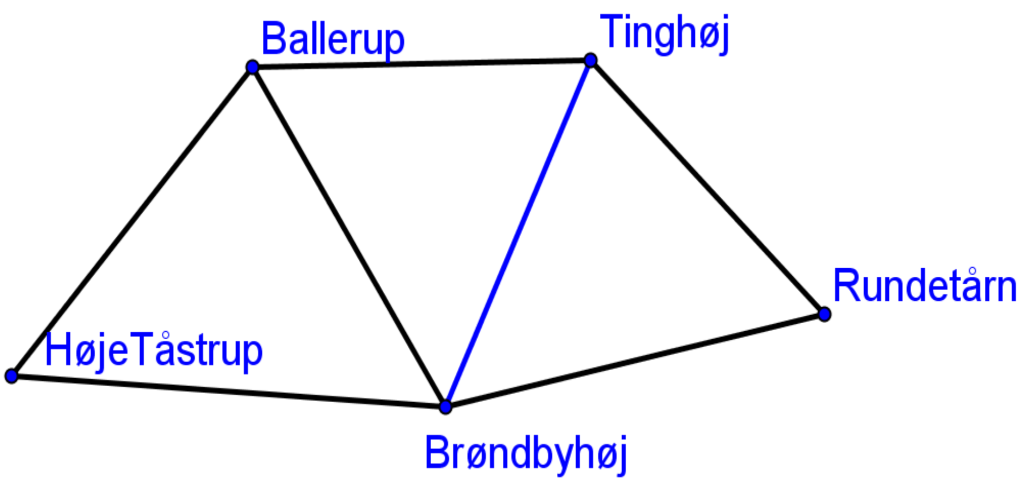
Johannes Mejers kort

De første første gode kort i Danmark og hertugdømmerne skyldes Johannes Mejer fra Husum. Han tegnede en lang række kort: først for hertugen på Gottorp, Friedrich 3. og senere for den danske konge, Christian 4. Han havde studeret matematik i København, som dengang også bl.a inkluderede astronomi, landmåling og kartografi. I midten af 1600-tallet var hans kort ubestridt de bedste, og det vedblev de med at være i en lang periode.

Trianguleringen i Danmark

Blandt de mange kort, der blev tegnet før 1700-tallet, var der et uløst problem: at få lokale kort til at hænge rigtigt sammen med andre lokale kort. Problemet bestod dels i, at uundgåelige småfejl ville blive summeret op ved sammentegning af mange kort, men værre: at de enkelte målebordsblade krympede en smule efter at være fjernet fra målebordet.

Først så sent som i 1764 startede Thomas Bugge [5] en opmåling, hvor hele landet blev delt ind i trekanter, som skabte et net til at placere lokale kort korrekt. Teknikken var: Bugge startede med en omhyggelig opmåling af én side i den første trekant (basislinjen). Derefter



Triangulering (Bugges første trekanter)

Basislinjen er den blå (omhygggeligt opmålte) linje fra Tinghøj til Brøndbye Høj. Alle øvrige (sorte) afstande er beregnet ved hjælp af vinklerne og basislinjen. Fra de nye punkter arbejdes der videre på trekantsnettet over Ballerup, Ølstykke ... til det fjerne Jylland.

målte han vinklen i et trekantshjørne, hvor basislinjen er det ene vinkelben og sigtelinjen mod trekantens 3. punkt er det andet ben. Denne vinkelmåling blev gentaget i det andet trekantshjørne på basislinjen. Så kunne alle sider og vinkler bestemmes i denne første trekant. Fra de beregnede sider i trekanten kunne man arbejde sig videre og opmåle nye trekanter udelukkende ved at bestemme vinkler. Således blev hele Danmark dækket af et

5 http://www.geomat.dk/landmaaling/kildetekster/pdf/Triangulering.pdf

net af trekanter, der kunne bruges til korrekt placering af de kort, der dækkede et mindre område. De lokale kort, der dækkede et areal på ca. 6,3 km x 9,4 km, udførtes som målebordsblade - se ovenover. Vi har tidligere set, hvordan målebordsblade blev tegnet; nu tegnes med denne triangulering et Danmarkskort, hvor de lokale kort kan indplaceres. For bedre at kunne indplacere lokalkortene blev der samtidigt med opmålingen af trekanternes hjørner også opmålt vigtige punkter som fx kirker.

Selvom om arbejdet hurtigt kan skitseres, var det en enorm indsats, det tog over et halvt århundrede at fuldføre. Arbejdedet lettedes af, at instrumenterne til opmåling af vinkler var blevet meget nøjagtige, og at man ved hjælp af sinuselationerne kunne beregne afstandene ret nøjagtigt. Så man var ganske vist fri for det meget besværlige og arbejdskrævende arbejde med at opmåle afstande med undtagelse af basislinjen og nogle få verifikationsafstande, men mange opmålinger af den samme vinkel, besværlig transport, tunge beregninger osv. tog sin tid.

Ved samlingen af kortene blev målestokken ændret fra 1:20.000 til 1:120.000. Dertil benyttedes et tegneteknisk redskab: en *pantograf*, som kan ses her:

http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/pentographe.html

Som øvelse for at forstå virkemåden kan du benytte linket:
http://mimimi.dk/bog/pantograf.htm

Modeller – beskrevet med funktioner

Alkoholmodellen

En sølle stakkel har beruset sig og har i dette øjeblik (kl. 01:00) en alkoholpromille på 1,8. En gængs antagelse er, at alkoholen forbrændes og promillen dermed mindskes med 0,15 promille pr. time.

Med denne viden og denne antagelse er det muligt at opstille en model, der til enhver tid kan beregne personens fremtidige alkoholpromille. Modellen bygger desuden på den antagelse, at staklen ikke er i stand til at indtage mere alkohol – eller i hvert fald ikke gør det.

I modellen indgår to variable: Tiden (t), som måles i timer fra nu (kl. 01:00) og den tilsvarende alkoholpromille ($p(t)$), som måles i vægt af alkohol i forhold til vægt af blod skrevet som promille. Desuden skal modellen med en funktionsforskrift beskrive sammenhængen mellem de to variable. Typisk vil modellen formuleres således:

Model

t er tiden målt i timer fra kl. 01:00

$f(t)$ er den tilsvarende alkoholpromille

$$f(t) = -0{,}15t + 1{,}8 \quad , \qquad 0 \leq t \leq 12$$

Bemærk, at efter 12 timer er promillen 0,0; en indsættelse af fx 13 i funktionsforskriften vil give et meningsløst resultat.

Kasteparablen

På den følgende side er beskrevet en opgave, hvor du skal finde en model for et kast samt undersøge og analysere nogle antagelser i forbindelse hermed.

Når man laver ”rapporter” om fysiske forsøg vil en dispostion noget lignende denne være fornuftig:

- Forside, der ud over titel indeholder navn(e), dato og tegning / foto (evt.)
- Indledning med
  - formål: fx ved forsøg at vise, at teorien om kasteparablen er rigtig
  - teori: formulering af hypoteser (og sammenhæng mellem antagelser og hypoteser)
- Materialer og metoder
  - Materialer: lav lister over alt anvendt udstyr

    - Fremgangsmåden beskrives, så læseren kan gentage forsøget
- Resultater
    - Resultater er i første omgang rå data, tabeller, grafer, billeder
    - Resultatbehandling går ud på at bruge de rå data til at besvare opgaven (som den er fomuleret af læreren eller dig selv). Det kan foregå ved
        - aflæsninger
        - beregninger
        - konstruktion af nye grafer
        - løsning af ligninger
        - og argumentation i øvrigt
- Diskussion
    - Diskussion: Vurder resultatet. Blev hypotesen verificeret eller falsificeret?
    - Fejl og usikkerhed: fjern ikke mærkelige data, men prøv at forklare dem.
    - Konklusion: Den skal være et svar på spørgsmålet i formålet! Den kan skrives som en opsummering og skal indeholde det væsentlige i det fundne, men der står ikke noget nyt i konklusionen.

Kasteparablen findes eksperimentelt

1. Optag en film af et eller flere kast.
   1. Kastet kan passende foretages lige foran en mur eller væg i et plan parallelt med muren.
   2. Det er vigtigt, at kameraet holdes / står fuldstændigt stille under kastet og kan fange hele bevægelsen,
   3. Mål vandret afstand for kastet.
2. Fra filmen tages med jævne mellemrum en række still-billeder af bevægelsen (fra lige efter objektet har forladt hånden til det rammer gulvet)
3. Disse indsættes præcis samme sted i GeoGebras tegneplan, objektets tyngdepunkt markeres som et punkt og billedet slettes igen.
4. Ved hjælp af regression findes den graf, der passer bedst til punkterne. Der bør – ved omhyggeligt arbejde – ikke være stor afstand fra noget punkt til grafen.
5. Beskriv modellen for det specifikke kast
6. Vurder: Støtter målinger og beregninger antagelsen, at tyngdepunktet for det kastede objekt følger en parabelbane?

Beregning af modeltype

1. Hvis en bevægelse ikke påvirkes af andre kræfter, vil objektet følge en ret linje med konstant hastighed.
   1. Lad t være tiden målt i sekunder efter objektet slippes
   2. Lad v være vinklen mellem x-aksen og linjen, objektet følger
   3. Lad h være hastigheden for objektet langs linjen (m/sekund)
   4. Se bort fra luftmodstand og tyngdekraft
   5. Lad $x(t)$ være x-værdien af objektets position t sekunder efter start
   6. Lad $y(t)$ være y-værdien af objektets position t sekunder efter start
   7. Indtegn kurven i GeoGebra med kommandoen *kurve* efter at have indtastet ”v=30º” og ”h=5”; benyt begge variable i definitionen af kurven.
   8. Lav en skyder for a, og se hvorledes ændringer af a påvirker kurven.
2. Når et emne slippes og falder mod jorden kun påvirket af tyngdekraften falder det hurtigere og hurtigere (idet vi ser bort fra luftmodstand.)
   1. Lad t være tiden målt i sekunder efter objektet slippes
   2. Lad $f(t)$ faldets længde efter t sekunder
   3. $f'(t)$ kaldes hastigheden (i tidspunkt t)
   4. $f''(t)$ kaldes accelerationen (som fortæller om hastighedsændringen). $f''(t)$ = 9,82
   5. Find en forskrift for $f'\,t)$
3. Find nu emnets bane som en ny kurve, idet du ændrer kurven fra punkt 1 med virkningen af tyngdekraften.

4. Find nu x som en funktion af t og indsæt resultatet i forskriften for $y(t)$. Sammenlign forskriften med den du fik fra dit første eksperiment.
5. Overvej: Hvad er ”den virkelige verden” og hvad er modellen?

Operation vandpjask

Undersøg ved hjælp af filmene (Materiale til projekter http://mimimi.dk/mixi.php):

- Sammenhængen mellem vandstand og tid $h(t)$ (i det data opsamles fra filmene)
  - Benyt GeoGebra. Overvej nøje, hvad der er rimelige intervaller for DM(h) og VM(h).
- Sammenhængen ændringen i vandstanden pr. tidsenhed og tiden.
  - Overvej nøje, hvorledes den elegant kan findes!
  - Hvad er sammenhængen mellem denne størrelse og udstrømningshastigheden?
  - Hvad er sammenhængen mellem udstrømningshastigheden og vandsøjlens højde?

- 4 vandstråler i forløbet med vidt forskellige strålelængder
  - Alle billeder af strålerne indsættes, så samme punkt får samme koordinater!
  - Punktet for vandstrålens begyndelse A placeres på y-aksen (så $x(A) = 0$).
  - Placer yderligere en række punkter på den synlige vandstråle og find ved regression funktionssammenhængen.
  - Sammenlign strålernes parametre og kommenter det sete. [6]

6 Kommentarerne kan gå fra det meget overfladiske og let sete, til dybsindige overvejelser om sammenhængen mellem de første resultater og parametrenes værdier.

Hypotesetest

Binomialfordelingen

En hypotese er en påstand.

Mange påstande kan verificeres eller falsifiseres ved at lave et eksperiment – og med resultatet af eksperimentet kan man så vurdere, om påstanden holder. Men sandhedsværdien af rigtig mange interessante hypoteser kan ikke umiddelbart afgøres, fordi de indeholder elementer af sandsynlighed: Patienten bliver helbredt med 63 % sandsynlighed, kornet spirer med 90 % sandsynlighed, sandsynligheden for at et barn bliver en dreng er 51,5 %, sandsynligheden for plat (i plat og kronespil) er 50 % osv.

I de her nævnte eksempler er der altid 2 udfald, hvor det ene kaldes *succes* (fx at patienten helbredes) og det andet *fiasko*. Måden at vurdere denne kategori af hypoteser på, er at lave en række eksperimenter (eller præcisere: n gentagelser af det samme eksperiment). Fordi der er to mulige udfald kaldes eksperimenterne *binomielle basiseksperimenter*.

Når vi gentager forsøget n gange kan vi tælle antallet af succeser: resultatet kan i princippet være alt fra 0, 1, 2 … n-1, n. Vi benytter X som navn for den stokastiske (dvs. tilfældige) variabel, der tæller antallet.

Hvis vi antager (antagelsen er hypotesen), at sandsynligheden for succes i et basiseksperiment er p, siges X at følge en binomialfordeling, hvilket skrives kort: $X \sim b(n,p)$, og man kan beregne

$P(X=a)$

som er punktsandsynligheden for at de n eksperimenter tilsammen har a successer.

Når eksperimenterne udføres n gange, forventer vi at få $n \cdot p$ successer – eller noget i den retning. Får vi noget, der er usandsynligt langt fra det forventede, vil vi forkaste hypotesen. Den er falsificeret. Og måske med urette, fordi der engang i mellem optræder usandsynlige ting: både heldige og uheldige. Omvendt: Får vi noget tæt på det forventede, accepterer vi hypotesen – indtil videre. Vi har ikke bevist, at hypotesen er rigtig, blot at den måske kunne passe.

Falske terninger

Find ud af hvilke af terningerne der er falske i terningemodellen. Til orientering er det kun frekvensen af ”6”-ere, der er interessant.

- Opstil hypoteser og testprocedure, hvor du også angiver, hvor store eller små afvigelser fra den ”ærlige terning”, du ønsker at afsløre.
- Gennemfør test og drag dine konklusioner.

Benyt GeoGebra: Kommando Binomialfordeling og Sandsynlighedslommeregneren
Regnearket: http://mimimi.dk/mixi/helpFiles/binomialfordeling.xls
Terninge-modellen: http://mimimi.dk/geo eller
http://www.geogebratube.org/student/m30628
Undersøgelser af hypotetisk / faktisk fordeling:
http://mimimi.dk/mixi/statsand/binomialfordeling.html