



Carl Friedrich Gauß (1777–1855), malet af Christian Albrecht Jensen

Lineær algebra

Ib Michelsen

Ikast 2015

Version 1

Hæftet her skal ses som et supplement til Klaus Thomsens forelæsninger på Aarhus Universitet (og låner flittigt derfra samt fra Nielsen og Salomonsen: *Lineær Algebra via Eksempler*.) Eventuelle fejl og udeladelser er selvfølgelig alene mit ansvar. Jeg har suppleret hæftet her med nogle selvrettende opgaver og muligheder for eksperimenter, der findes på adressen: <https://www.geogebra.org/m/o6Q6YECp>

hvor der vælges kapitlerne 7 og følgende: Lineær Algebra.

Samtidig sendes en tak til de kolleger på SG, der har fulgt projektet og kommet med råd og rettelser. Jeg vil også gerne takke 2y, fordi klassen helhjertet har accepteret at deltage i disse extracurriculære løjer.

Ib Michelsen

Ikast Efteråret 2018

Der er kun foretaget nogle få ændringer: Nogle enkelte af trykfejlene er rettet, hyperlinks er ajourført og bemærk: Jeg har ikke længere links til Klaus Thomsens forelæsninger.

Materialet vil blive benyttet i 3u med det formål

- at repetere og perspektivere kernestof
- at være en hjælp til bedre SRP-besvarelser
- at lette starten på studier med matematikindhold

Ib Michelsen

Indholdsfortegnelse

Ligningssystemer.....	6
2 ligninger.....	6
3 ligninger.....	8
Matrix-beregninger.....	10
Navngivning og notation.....	11
3 ligninger med 2 ubekendte.....	11
3 ligninger med 4 ubekendte.....	12
3 ligninger med 4 ubekendte (version 2).....	12
3 ligninger med 4 ubekendte (version 3).....	13
Opgaver.....	14
Vektorer og matricer.....	16
Fra n ligninger til én vektorligning.....	16
Homogent og inhomogent ligningssystem.....	17
Regneregler for matricer.....	17
Invers matricer mv.....	18
Oversigt: Regneregler for matricer.....	20
Transponerede matricer.....	20
Corollar 1.....	20
Corollar 2.....	20
Opgaver.....	21
Determinanter.....	24
Beregning af orden n	24
Determinantsætningen.....	25
Sætning om rækkeoperationer.....	26
Sætning om søjleoperationer.....	26
Diagonalmatrix.....	26
Trekantsmatrix.....	26
Sætning om diagonal- og trekantsmatrix.....	26
Sætning om transponering.....	26
Løsning af ligninger.....	27
Den adjungerede matrix.....	27
Den inverse matrix (Sætning).....	27
Cramers regel.....	29
Produktreglen.....	30
Opgaver.....	31
Underrum og lineære transformationer.....	34
Underrum.....	36
Nulrum.....	36
Søjlerummet eller billedrummet.....	36
Dimensionsformlen.....	36
Løsningsmængden til et ligningssystem.....	37

Standardbaser.....	37
Lineære transformationer defineret af en matrix A	37
Definition.....	37
Matricen for en lineær transformation.....	38
Sammensætning af lineære transformationer.....	38
Geometrisk fortolkning af lineære transformationer.....	39
Opgaver.....	42
Projektioner og orthogonalitet.....	44
Definition af prikproduktet.....	44
Sætninger om prikproduktet.....	44
Normen af en vektor	44
Sætninger om prikproduktet.....	44
Ortogonale vektorer i $\mathbb{R}^n$	45
Pythagoras sætning i $\mathbb{R}^n$	45
Projektion af vektorer i $\mathbb{R}^n$	45
Cauchy-Schwartz' ulighed.....	46
Trekantsuligheden.....	46
Vinklen mellem 2 vektorer i $\mathbb{R}^n$	47
Projektion på et underrum i $\mathbb{R}^n$	48
Definition af projektion på underrum.....	48
Definition af afstand fra vektor til underrum.....	48
Sætning om afstanden.....	48
Sætning om projektionen.....	48
Sætning: Beregning af koefficienter til p	49
Projektion på et underrum med ortogonal basis.....	50
Mindste kvadraters metode.....	51
Problemet.....	51
Metoden.....	52
Bedste rette linje (Definition).....	52
Bedste rette linje (Sætning).....	53
Generalisering af mindste kvadraters metode.....	53
Det ortogonale komplement.....	54
Opgaver.....	55
Egenverdier og egenvektorer.....	62
Definitioner.....	62
Introduktion med eksempler.....	62
Sætninger.....	64
Potenser.....	64
Antal løsninger for et differentiaalligningssystem.....	64
Symmetriske matricer (Sætning 1).....	64
Symmetriske matricer (Sætning 2).....	65

Opgaver.....	67
Stikordsregister.....	70

Ligningssystemer

2 ligninger

Herunder løses "et ligningssystem" på en anderledes måde, end du er vant til; der er 2 ligninger, x og y er de 2 *ubekendte*; tallene på venstre side af ligningerne kaldes *koefficienter*. I første omgang kan det synes at være besværligt og omstændeligt, men tro mig: Der er en mening med galskaben. Og: det drejer sig ikke om at finde en løsning for løsningens skyld, men om at forstå metoden.

Husk på, at en *løsning til en ligning* eller et ligningssystem er noget, der gør ligningen sand. I opgaven herunder, er løsningen altså det eller de talpar (x_0, y_0) hvor værdierne indsat på hhv. pladsen for x og pladsen for y gør begge ligninger sande. Hvis der altså findes en (evt. flere) sådanne talpar.

Bemærk, at en del af metoden er, at vi efter givne regler hele tiden finder et nyt ligningssystem, der har de samme løsninger som det foregående. Derfor optræder ligningerne i par. Parrene kan være nøjagtig de samme ligninger, hvor der blot er lavet en reduktion, men ofte er der tale om et nyt ligningssystem, der dog har de samme løsninger som det foregående.

På næste side finder du en kommenteret løsning af ligningen skridt for skridt; på denne side ser du, hvorledes der er kontrolleret, at hvert skridt er beregnet rigtigt. Det indses ved, at løsningen er den samme i alle rækker.

Du skal bemærke, at *ændringer af ligninger* foregår ved (udover banale reduktioner)

1. Ombytning af ligningernes rækkefølge. (Evt.)
2. Multiplikation af begge sider i en ligning med et tal forskelligt fra 0
3. Addition i en ligning med et sådant multiplum fra en anden ligning på begge sider.

The screenshot shows a software interface for solving a system of linear equations. The window title is 'linearLigningSystem_1.ggb'. The menu bar includes 'Fil', 'Redig', 'Vis', 'Indstilling', 'Værkt', 'Vindu', 'Hjælp', and 'Logget ind som IBM42'. The toolbar contains various icons for drawing and editing. The main area displays a list of 9 steps, each with a 'Beregn' command and a resulting solution set.

Step	Command	Result
1	Beregn[$\{2x+3y=1, 3x+y=5\}, \{x, y\}$]	$\{x=2, y=-1\}$
2	Beregn[$\{x+3/2y=1/2, 3x+y=5\}, \{x, y\}$]	$\{x=2, y=-1\}$
3	Beregn[$\{x+3/2y=1/2, -3(x+3/2y)+3x+y=-3(1/2)+5\}, \{x, y\}$]	$\{x=2, y=-1\}$
4	Beregn[$\{x+3/2y=1/2, -9/2y+y=-3/2+5\}, \{x, y\}$]	$\{x=2, y=-1\}$
5	Beregn[$\{x+3/2y=1/2, -7/2y=7/2\}, \{x, y\}$]	$\{x=2, y=-1\}$
6	Beregn[$\{x+3/2y=1/2, y=-1\}, \{x, y\}$]	$\{x=2, y=-1\}$
7	Beregn[$\{-3/2y+x+3/2y=-3/2(-1)+1/2, y=-1\}, \{x, y\}$]	$\{x=2, y=-1\}$
8	Beregn[$\{x=2, y=-1\}, \{x, y\}$]	$\{x=2, y=-1\}$
9		

At the bottom, there is an 'Input:' field.

Sådan løses ligningssystemet:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \Leftrightarrow \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{2}y &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{2}y &= \frac{1}{2} \\ -3 \cdot (x + \frac{3}{2}y) + 3x + y &= -3 \cdot \frac{1}{2} + 5 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{2}y &= \frac{1}{2} \\ \frac{-9}{2}y + y &= \frac{-3}{2} + 5 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{2}y &= \frac{1}{2} \\ \frac{-7}{2}y &= \frac{+7}{2} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{2}y &= \frac{1}{2} \\ y &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-3}{2}y + x + \frac{3}{2}y &= \frac{-3}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ y &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Til højre ses en grafisk løsning, hvor de røde linjer svarer til det første ligningssystem og de blå til det sidste. Begge par (af linjer) skærer hinanden i (2,-1); de skal jo have samme løsning.

Det oprindelige ligningssystem

1. ligning: Division med 2 på begge sider

1. ligning multipliceres på begge sider med -3 og resultaterne adderes til hhv. venstre og højre side i ligning 2.

Reduktion

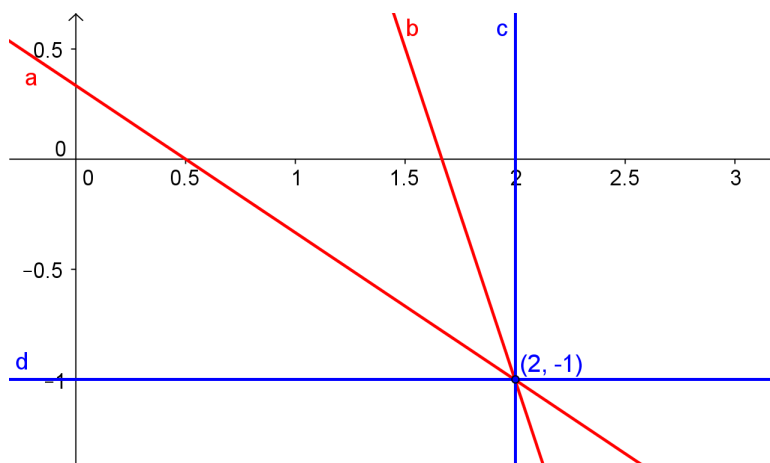
Yderligere reduktion

2. ligning:

Der divideres med -7/2 på begge sider.

2. ligning multipliceres på begge sider med -3/2 og resultaterne adderes til hhv. venstre og højre side i ligning 1.

Efter reduktion fås ligninger, hvor svaret umiddelbart kan aflæses



Øvelse 1

Løs ligningssystemerne herunder som lige vist.

$$1x + 3y = 7$$

$$3x + y = 5$$

$$5x - 3y = 13$$

$$3x + y = 19$$

$$2x - 3y = -3$$

$$-4x + y = 11$$

Gør prøve ved i begge ligninger at indsætte løsningen. Du skal så få højresiden; i modsat fald er der lavet en fejl. Du skal også prøve at indsætte både første og sidste ligningssystem i GeoGebra (som ligninger for linjer). De bør give samme løsning (dvs. samme skæringspunkt). (Se figuren på foregående side.)

3 ligninger

Ligningssystemer kan også indeholde flere end 2 ligninger. Antallet af ubekendte behøver heller ikke at være lig med antallet af variable. Det er det nu i næste eksempel.

Prøv at følge beregningerne og skriv evt.- yderligere kommentarer udfor ligningerne.

$$3x + 2y - z = 5$$

$$2x - y + 4z = 15 \Leftrightarrow$$

$$5x + 3y - 4z = 1$$

1. ligning: Der divideres med 3 på begge sider

$$x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{5}{3}$$

$$2x - y + 4z = 15 \Leftrightarrow$$

$$5x + 3y - 4z = 1$$

1. ligning multipliceres på begge sider med -2 og resultaterne adderes til hhv. venstre og højre side i ligning 2.

$$x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{5}{3}$$

$$-\frac{7}{3}y + \frac{14}{3}z = \frac{35}{3} \Leftrightarrow$$

$$5x + 3y - 4z = 1$$

1. ligning multipliceres med -5 på begge sider og resultaterne adderes til hhv. venstre og højre side i ligning 3.

$$x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{5}{3}$$

$$-\frac{7}{3}y + \frac{14}{3}z = \frac{35}{3} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{3}y - \frac{7}{3}z = -\frac{22}{3}$$

2. ligning: Der divideres på begge sider med -7/3

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z &= \frac{5}{3} \\ y - 2z &= -5 \Leftrightarrow \\ \frac{-1}{3}y - \frac{7}{3}z &= \frac{-22}{3} \end{aligned}$$

2. ligning multipliceres med 1/3 på begge sider og resultaterne adderes til hhv. venstre og højre side i ligning 3.

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z &= \frac{5}{3} \\ y - 2z &= -5 \Leftrightarrow \\ -3z &= -9 \end{aligned}$$

3. ligning: Der divideres på begge sider med -3

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z &= \frac{5}{3} \\ y - 2z &= -5 \Leftrightarrow \\ z &= 3 \end{aligned}$$

3. ligning multipliceres med 2 på begge sider og resultaterne adderes til hhv. venstre og højre side i ligning 2.

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z &= \frac{5}{3} \\ y &= 1 \Leftrightarrow \\ z &= 3 \end{aligned}$$

3. ligning multipliceres med 1/3 på begge sider og resultaterne adderes til hhv. venstre og højre side i ligning 1.

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}y &= \frac{8}{3} \Leftrightarrow \\ y &= 1 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

2. ligning multipliceres med -2/3 på begge sider og resultaterne adderes til hhv. venstre og højre side i ligning 1.

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Bemærk den systematiske måde ligningerne løses på: Hvorledes man bruger én ligning til at forenkle en anden. Ulempen er, at det ofte giver en del brøkregning, som kan være drilagtig og dermed medføre fejlregninger.

Hvis man var startet med at multiplicere 2. ligning på begge sider med -1 og addere resultaterne til hhv. venstre og højre side i ligning 1, havde ligning 1 fået den ønskede begyndelse $1 \times \dots$, men uden at der optrådte brøker i resten af ligningen. Med lidt omtanke, kan man fortsætte sådan, indtil man når samme resultat som vist ovenover. (Prøv det :-)

Matrix-beregninger

Vi ser nu på det samme ligningssystem, men vil skrive det uden navnene på de ubekendte og uden lighedstegnene

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 5 \\ 2x - y + 4z &= 15 \\ 5x + 3y - 4z &= 1 \end{aligned}$$

bliver til

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \\ 5 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

som kaldes en *totalmatrix* for ligningssystemet. De 3 første søjler består af koefficienterne til de ubekendte, den sidste søjle er ligningernes højresider.¹ På denne matrix vil vi nu udføre nogle rækkeoperationer svarende til omformningen af ligningssystemet (se side 6):

1. Ombytning af 2 rækker
2. Multiplikation af en række med et tal (ikke 0)
3. Addition til en række med et multiplum af en anden række

Øvelse 2

Noter, hvilke rækkeoperationer der er foretaget fra matrix til matrix:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \\ 5 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -10 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \\ 5 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & -7 & 14 & 35 \\ 0 & -12 & 21 & 51 \end{pmatrix} \sim \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -4 & 7 & 17 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Du kan nu umiddelbart aflæse løsningen i sidste søjle som $x = 2$, $y = 1$ og $z = 3$.

Øvelse 3

Løs ligningssystemet her med samme metode: $\begin{aligned} -2x + 5y &= 4 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$

¹ De to dele af matricen kan adskilles af en lodret linje, som nogle forfattere gør, men det er ikke et krav.

Navngivning og notation

En matrix kan beskrives og defineres ved angivelse af *matrixens enkelte elementer* (indgange, koordinater, ...²). Et enkelt element i den i 'te række og i den j 'te søjle betegnes a_{ij} . Husk rækkefølgen række, søjle: I alfabetet kommer r før s .

Matricen kan også skrives som M , hvis der ikke er speciel grund til at vise enkeltelementerne. For at vise antallet af rækker og søjler, kan matricen skrives: $M_{r,s}$, hvor r naturligvis står for antallet af rækker, s for antallet af søjler.

Er $r=s$ kaldes *matricen kvadratisk*.

Løses n ligninger med n ubekendte med matrixregning, fås en totalmatrix $M_{n,n+1}$.

I øvelse 2 er matricen med nogle rækkeoperationer ændret til en matrix (midterste række, midterste matrix) med flest mulige 0'er nederst i søjlerne. Vi kan tegne en trappelinje tværs gennem matricen mellem de tre nederste 0'er i venstre nederste hjørne og resten af matricen. (Tegn i 1. søjle en vandret linje mellem 0 og 1; tegn i 2. række en lodret linje mellem 0 og 1; tegn i 2. søjle en vandret linje mellem 1 og 0 og tegn i 3. række en lodret linje mellem 0 og -1.) Alle trinene har højden en; det gælder også for bredden her, men sådan er det ikke altid.

Matricen er skrevet på *Echelonform*. Første element i en række ($a_{i,j} \neq 0$) kaldes en *pivot*. Står pivot-elementet i sidste søjle, svarer det til ligningen

$$0 = a_{i,n+1}, \text{ hvilket betyder, at ligningssystemet ingen løsninger har. Alle}$$

pivotelementerne kan ændres til 1 og ved fortsatte rækkeoperationer kan alle tal over pivotelementerne ændres til 0. Matricen er så skrevet på *reduceret Echelonform*; rækkeoperationerne, der fører hertil, kaldes *Gausselimination*.

3 ligninger med 2 ubekendte

Vi vil løse ligningssystemet:

$$2x + 5y = 3$$

$$x - 3y = 4$$

$$3x + 2y = 5$$

Dertil benyttes den tilsvarende totalmatrix, som omformes ved nogle rækkeoperationer:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 11 & -5 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 11 & -5 \\ 0 & 11 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 11 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Bemærk, at den 3. række i matricen betyder, at $0x + 0y = -2$; det er umuligt.

Ligningssystemet har derfor ingen løsning. Der er en *modstrid i ligningssystemet*.³

² Kært barn har mange navne. For række- og søjlevektorer er koordinater almindeligt, Nielsen og Salomonsen benytter "indgange", GeoGebra (og amerikansk litteratur) benytter "element".

³ I virkelighedens verden kan det sagtens tænkes, at man vil estimere nogle størrelser, foretager flere målinger end strengt nødvendigt og ikke kan finde en løsning, fordi der optræder målefejl. I det tilfælde

Øvelse 4

Kontroller beregningerne ovenfor.

Øvelse 5

Indtegn de tre linjer, der svarer til de oprindelige ligninger, i GeoGebra og forklar, hvorfor der er modstrid i systemet.

Hvis ligningssystemet havde set lidt anderledes ud og der havde været en løsning: Hvordan ville tegningen i GeoGebra så se ud?

Og: hvordan skulle den sidste matrix så se ud?

3 ligninger med 4 ubekendte

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 4$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 7$$

Som ovenfor forsøges ligningssystemet løst ved at omskrive den tilsvarende totalmatrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Så også selv om der er flere ubekendte end ligninger, kan der findes en modstrid! Her er der altså heller ikke en løsning.

3 ligninger med 4 ubekendte (version 2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Den sidste ligning er sand for alle mulige værdier af de ubekendte og er derfor overflødig:

må man finde en løsning, som "bedst muligt" tilfredsstiller alle ligninger. I eksemplet her fås (hvis man parrer ligningerne 2 og 3), at løsninger for x varierer fra 1,73 over 2,09 til 2,64. Tilsvarende for y .

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{8}{5} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{8}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Det ses nu let, at x_3 og x_4 kan vælges frit og at derefter er de to sidste ubekendte bestemt som:

$$x_1 = 2 - x_3 + \frac{7}{5}x_4$$

$$x_2 = x_3 - \frac{8}{5}x_4$$

Meget naturligt kaldes x_3 og x_4 *frie variable* i modsætning til de to andre *bundne variable*.

3 ligninger med 4 ubekendte (version 3)

Vi prøver nok en gang at ændr en lille smule i det oprindelige ligningssystem:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Der er altså ændret fortegn for elementet i totalmatricen: $a_{3,4}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 10 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Her er der ingen modstrid så løsningen fortsættes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{27}{10} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Se nu på den sidste totalmatrix: I første ligning subtraherer du x_3 på begge sider, i anden ligning adderer du samme på begge sider. Så får du:

$$x_1 = \frac{27}{10} - x_3$$

$$x_2 = -\frac{4}{5} + x_3$$

$$x_4 = \frac{1}{2}$$

Her ses, at der er en fri variabel og 3 bundne: x_4 er fuldstændig bestemt, hvorimod de to andre afhænger af x_3 . Også her er der uendeligt mange løsninger.

Opgaver

Opgave 1

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ -y - z &= -5 \\ 3z &= 9 \end{aligned}$$

Opgave 2

Kan du afgøre, om ligningssystemet har løsninger, ved at tegne linjerne?

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ 3x + y &= -5 \\ 3x - y &= 2 \end{aligned}$$

Opgave 3

Bring matricen på echelonform og løs så ligningssystemet, hvor den er totalmatrix.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 11 \\ 2 & 3 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

Opgave 4

Bring matricen på echelonform og løs så ligningssystemet, hvor den er totalmatrix.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Opgave 5

Bring matricen på echelonform og løs så ligningssystemet, hvor den er totalmatrix.

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -5 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Opgave 6

Find 3.gradspolynomiet, hvor

$$\begin{aligned} f'(0) &= 2 \\ f'(2) &= 12 \\ f(0) &= -5 \\ f(2) &= 7 \end{aligned}$$

Opgave 7

Find mængden af

1. førstegradspolynomier, hvor $P(2,3)$ og $Q(5,4)$ ligger på grafen og
2. også mængden af andengradspolynomier, hvor de samme punkter ligger på grafen.

Vektorer og matricer

Du er i forvejen bekendt med vektorer: Både som geometriske vektorer og n -tupler $\in \mathbb{R}^n$.

Bemærk, at som n -tupler er de blot nogle specielle matricer! Vektorer skrives ofte som

søjlevektorer: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eller evt. som rækkevektorer: $\vec{b} = (1; 2)$. Betragt matricen:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; den kan opfattes som bestående af de to søjlevektorer $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ og

$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, således at A kan skrives: $A = (a_1, a_2)$.

Fra n ligninger til én vektorligning

Betragt ligningssystemet

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 4$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

som har totalmatricen

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Lad os definere A ved hjælp af søjlevektorerne fra T : $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, hvor

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ osv. og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Det ses nu nemt, at en løsning til ligningssystemet er en løsning hvis (og kun hvis)

linearkombinationen på venstre side er lig med vektor $\vec{b}$:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (\text{Kontrollér})$$

Defineres $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ og produktet $Ax = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ses, at det

oprindelige ligningssystem kan skrives som **vektorligningen: $Ax = \vec{b}$**

Homogent og inhomogent ligningssystem

$Ax = b$ er homogent, hvis b er nulvektoren, ellers inhomogent.

Er ligningssystemet homogent, har det altid nulvektoren som løsning. Enten er der kun denne løsning eller også er der uendelig mange løsninger.

A kaldes koefficientmatricen; tilføjes vektoren b fås totalmatricen $T = (A, b)$.

Regneregler for matricer

Addition

2 matricer (med samme antal rækker og samme antal søjler) adderes ved at addere de tilsvarende elementer / indgange:

$S = A + B$, hvis der for matricernes indgange gælder $s_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ for alle par i, j

Multiplikation med skalar

En matrix multipliceres med en skalar ved at multiplicere alle indgangene med skalar:

$P = \alpha A$, hvis der for matricernes indgange gælder $p_{i,j} = \alpha \cdot a_{i,j}$ for alle par i, j

Matrixmultiplikation

Vi har tidligere defineret produktet af to matricer, hvor højre matrix (her B) er en vektor (side 16): $A_{r,s} B_{s,1} = C_{r,1}$ og hvor selve produktet også er en(søjle)vektor.

Bemærk, at produktet kun er defineret, hvis antal søjler i første faktor er lig med antal rækker i anden faktor. Og at den kommutative regel **IKKE** gælder.

Antag nu, at matrix B har s rækker og t søjler: for hver søjle i B som fx b_j kan der dannes et produkt med A : søjlevektoren c_j .

Således defineres produktet $A_{r,s} B_{s,t} = (c_1, c_2, \dots, c_t) = C_{r,t}$

Eksempel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ og } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Søjlevektorerne i produktet beregnes nu en ad gangen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ -1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Tilsvarende fås de to andre søjlevektorer i produktet som (regn efter!)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 18 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Heraf ses, at

$$A B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 7 & 11 & -6 \\ 16 & 18 & 2 \end{pmatrix}$$

Øvelse 1

Her kan du beregne BA (med eksemplets tal).

Hvorfor? Gør det!

Matrixmultipliktion er associativ

$$(AB)C = A(BC) = D$$

Bevises ved at beregne d_{ij} på begge sider af lighedstegnet og påvise, at resultaterne er ens.

Invers matricer mv.

Nulmatrix

En *nulmatrix* N er en matrix, hvor alle indgangene er nul (0).

I så fald gælder for enhver matrix A , at $A+N=N+A=A$.

Enhedsmatricer

Kvadratiske matricer, hvor alle indgange er 0 undtagen i diagonalen fra elementet i første række og første søjle til det modsatte hjørne (hvor indgangene er 1), er *enhedsmatricer* (og betegnes typisk I). De kan fx se sådan ud:

$$I_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad I_{4,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der vil så gælde for en vilkårlig matrix $A_{r,s} I_{s,s} = I_{r,r} A_{r,s} = A_{r,s}$

Øvelse 2

Kontroller ovenstående, idet $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Invers matrix

Lad A være en kvadratisk matrix. Den inverse matrix (A^{-1}) er den matrix (hvis den findes), hvor der gælder, at $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Så er A *invertibel* og ligningen $Ax = b$ har netop en løsning for ethvert b . Hvis A ikke har en invers matrix, siges A at være *singulær*.

Øvelse 3

$$\text{Lad } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ og } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Beregn produkterne AB og BA .

Øvelse 4

Løs vektorligningen $Ax = b$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ og } b = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hint: Multiplicer begge sider i ligningen med B (se øvelse 3) på venstre side. Kontroller svaret.

Løsning af ligninger med invers matrix

Hermed er det vist gennem eksemplet, hvorledes man kan finde en løsning i en vektorligning: $Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$. Du skal bemærke, at den inverse matrix ikke afhænger af vektoren b , så i virkeligheden er her opskriften på løsning af uendelig mange ligninger for alle mulige b -vektorer..

Beregning af den inverse matrix

Lad A være den givne matrix og B den tilsvarende inverse, vi ønsker at finde.

$$AB = I \Leftrightarrow A_{n,n}(b_1, b_2, \dots, b_n) = I_{n,n} \Leftrightarrow ; b_j \text{ og } i_j \text{ betegner her søjlevektorer i matricerne.}$$

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}: A_{n,n}b_j = i_j$$

Her er der n ligningssystemer eller vektorligninger, der skal løses, hvor det er søjlevektorerne i B , der er de ukendte. Højresiderne i ligningerne er søjlevektorer, der udelukkende består af 0'er med undtagelsen 1 på j 'te plads.

Hver af de n ligninger kan løses ved Gausselimination; det smarte er, at det kan gøre i et hug. Vi laver nemlig en udvidet totalmatrix med alle højresiderne (dvs. alle søjlerne fra I), fordi der jo skal laves de samme rækkeoperationer for dem alle.

Vi vælger den lille matrix A fra øvelse 3 og finder A^{-1} .

$$(A \ I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Først er A og I skrevet som en udvidet totalmatrix. Da første element i første række allerede er 1, er division med dette element ikke nødvendigt.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Til anden række er adderet 3 gange første række for at få 0 i anden rækkes første element. Heldigt er pivotelementet 1, så division kan overspringes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Nu adderes anden række (gange 1) til første række for at skaffe 0 i første rækkes andet element. Nu står løsningen A^{-1} i de sidste 2 søjler.

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ fra øvelse 3.}$$

Invers matrix til et produkt

$$(A \ B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Øvelse 5

Bevis den sætning

Oversigt: Regneregler for matricer

For addition gælder den kommutative og den associative regel

For multiplikation med skalar(er) gælder den associative regel

For matrixmultiplikation gælder den associative regel

Den distributive regel gælder for matrixmultiplikation og skalarmultiplikation (både med to matricer og med 2 skalarer)

(Alt forudsat at der kan adderes hhv. multipliceres)

Transponerede matricer

Lad A være en vilkårlig matrix; den *transponerede matrix* A^T er den matrix, hvor den første række i A bliver den første søjle, den anden række i A , bliver den andens søjle osv.

Corollar 1

$$(A \ B)^T = B^T \ A^T$$

(Bemærk rækkefølgen)

Corollar 2

For vilkårlige vektorer v og w og en vilkårlig matrix A gælder: $(A \ v) \cdot w = v \cdot (A^T \ w)$ (Se side 22)

Opgaver

Opgave 1

Lad $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$; beregn matricen $B = 8A$.

Opgave 2

Lad A og B være givet som i opgave 1; beregn $C = \sqrt{2}A - B$.

Opgave 3

Beregn matrixprodukterne AB og BA .

Opgave 4

Givet følgende matricer $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ skal du for hver af dem beregne matrixproduktet med A .

Opgave 5

Beregn matrixprodukterne for alle mulige kombinationer af to matricer blandt de

følgende: $F = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$,

Opgave 6

Beregn L^2 , idet $L = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Opgave 7

Find de inverse matricer til M og N , idet $M = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

1. Benyt resultatet til at finde de inverse matricer til MN og NM
2. Find også de transponerede matricer: M^T og N^T .
3. Find endelig de inverse matricer til de transponerede samt begge produkter af de transponerede.
4. Find en matrix X , hvorom det gælder at $MX = N$
5. Find en matrix X , hvorom det gælder at $MX + L = N$ (L er defineret i opgave 6)

Opgave 8

Givet matricerne R og S : $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

1. Beregn begge matrixprodukter
2. Gør rede for, at er $ad \neq bc$, er matricerne invertible og omvendt.

Opgave 9

Benyt ovenstående til at finde de inverse matricer til følgende:

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 10

Benyt opgave 8 til at løse ligningssystemet:
$$\begin{array}{rcl} 2x & -y & = -1 \\ 5x & +3y & = 14 \end{array}$$

Opgave 11

$$\text{Lad } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

1. Noter: Hvilke af størrelserne (herunder) er tal, rækkevektorer, søjlevektorer og/eller matricer?
 1. $A v$
 2. w
 3. $(A v) \cdot w$
 4. $((A v) \cdot w)_{1,1}$
2. $((A v) \cdot w)_{1,1} = (A v)^T w$
 1. Hvad er størrelsen $(A v)$? $(A v)^T$? og w ?
 2. Hvilke operationer foretages mellem A , v og w ?
 3. Hvad er størrelsen $(A v)^T w$, og hvilken dimension har den?
 4. Hvorfor gælder lighedstegnet?

3. $((Av) \cdot w)_{1,1} = (Av)^T w = (v^T A^T) w$
 1. Hvilken regel er benyttet ved sidste omskrivning?
4. $((Av) \cdot w)_{1,1} = (Av)^T w = (v^T A^T) w = v^T (A^T w)$
 1. Hvilken regel er benyttet ved sidste omskrivning?
5. $((Av) \cdot w)_{1,1} = (Av)^T w = (v^T A^T) w = v^T (A^T w) = (v \cdot (A^T w))_{1,1}$
 1. Beskriv, hvad det sidste udtryk betyder
 2. Hvorfor er den sidste omskrivning rigtig?
6. $(Av) \cdot w = v \cdot (A^T w)$
 1. Og hvorfor gælder denne ligning?

Determinanter

Beregning af orden n

n = 1

Determinanten er et tal, der knyttes til en kvadratisk matrix. Vi har ikke før set på matricer, hvor antallet af rækker = antallet af søjler = 1, men lad os starte med den.

Givet ligningssystemet (med en ligning) $-3x = 6$ har vi koefficientmatricen $A_1 = (-3)$

Den tilsvarende determinant skrives $\det(A_1) = |A_1| = -3$

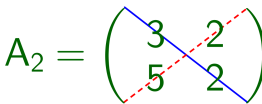
Det gælder generelt, at matrixens element er lig med determinanten.⁴

n = 2

Når $A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, gælder $\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Du kan sammenligne med resultatet i opgave 8, se side 22.

Som huskeregel for beregningen kan benyttes diagonalerne:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$


hvor produktet af tallene på den blå diagonal fratrækkes produktet af tallene på den røde (stiplede) linje. I eksemplet bliver $\det(A_2) = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = -4$. Sammenlign med formelen ovenover.

n = 3

Når $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, gælder $\det(A_3) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

som beregnes

$$\det(A_3) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

⁴ Som det ses nedenunder kan de lodrette linjer også bruges som betegnelse for determinant, når matricen skrives med sine elementer. I netop dette tilfælde (hvor $n = 1$) ville det være uheldigt, da tegnet for determinant kan forveksles med et numerisk tegn.

Som huskeregel kan der også her benyttes diagonaler. Matricen tilføjes to søjler, nemlig matrixens egne to første. Produkterne beregnes som før, men nu med tre faktorer. Produkterne langs blå diagonaler adderes, langs røde subtraheres.

Benyt som et eksempel $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ og kald den udvidede matrix for A'_3 .

$$A'_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 6 & 5 & 4 \\ 7 & -2 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Så kan determinanten beregnes som $\det(A_3) = +(-12 + 84 - 30) - (84 + 36 + 10) = -88$

Determinanten kan også beregnes med en alternativ - mere generel - metode, som det demonstreres herunder.

Det generelle tilfælde

Antag, at A er en kvadratisk matrix med n rækker og n søjler. Hvis vi i denne sletter den i 'te række og den j 'te søjle fås en ny kvadratisk matrix med $n-1$ rækker og $n-1$ søjler.

Denne matrix kalder en *undermatrix* og får betegnelsen M_{ij} . Tilsvarende fås *underdeterminanten* $\det(M_{ij})$. Med dette kan beregnes *komplementet* $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$.

Nu kan A 's determinant beregnes ved *opløsning efter en række* (eller helt tilsvarende ved *opløsning efter en søjle*):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$$

I eksemplet med $n = 3$ kan det gøres sådan (for $i=2$):

$$\begin{aligned} \det(A_3) &= \sum_{j=1}^3 a_{2j} \cdot A_{2j} = 5 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \\ \det(A_3) &= 5 \cdot (-1) \cdot 8 + 4 \cdot (+1) \cdot (-24) + 6 \cdot (-1) \cdot (-8) = -40 - 96 + 48 = -88 \end{aligned}$$

Determinantsætningen

Ligningen $Ax = b$ har netop én løsning, når $\det(A) \neq 0$. Når $\det(A) = 0$, har ligningen ingen eller uendelig mange løsninger. For $Ax = 0$ gælder det sidste (hvor 0 er nulvektoren).

Øvelse 1

Beregn determinanten for A_3 ved opløsning efter de andre rækker og søjlerne.

Kontroller, at resultatet hver gang er: $\det(A_3) = -88$

Sætning om rækkeoperationer

R1: Ombyttes to rækker i en matrix skifter determinanten fortegn

R2: Multipliceres en række med en konstant multipliceres determinanten også med konstanten

R3: Hvis der til en række adderes et multiplum af en anden række, ændres determinanten ikke

Sætning om søjleoperationer

S1: Ombyttes to søjler i en matrix skifter determinanten fortegn

S2: Multipliceres en søjle med en konstant multipliceres determinanten også med konstanten

S3: Hvis der til en søjle adderes et multiplum af en anden søjle, ændres determinanten ikke

Diagonalmatrix

En kvadratisk matrix er en *diagonalmatrix*, hvis kun elementerne $a_{11}, a_{22}, a_{33} \dots a_{nn}$ kan være forskellige fra 0. Disse elementer kaldes *diagonalen*.

Trekantsmatrix

En matrix, hvor alle elementer under diagonalen er nul, kaldes en øvre trekantsmatrix.

En matrix, hvor alle elementer over diagonalen er nul, kaldes en nedre trekantsmatrix.

Sætning om diagonal- og trekantsmatrix

Determinanten for diagonal- og trekantsmatricer er produktet af elementerne i diagonalen.

Sætning om transponering

En matrix og dens transponerede matrix har samme determinant.

(Sammenlign med resultaterne fra øvelse 1).

Løsning af ligninger

Den adjungerede matrix

Lad A være en kvadratisk matrix af orden n . Den *adjungerede matrix* A^+ er matricen med komplementerne A_{ji} på den ij 'te plads.

Bemærk ombytning af indeks!

Øvelse 2

$$\text{Lad } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Beregn A^+ , AA^+ og A^+A . Beregn desuden determinanten for A .

Hvad bemærker du?

Øvelse 3

$$\text{Lad } A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Beregn A^+ , AA^+ og A^+A .

Hvad bemærker du?

Den inverse matrix (Sætning)

Lad A være en kvadratisk matrix med en determinant forskellig fra nul. Da eksisterer den inverse matrix og kan beregnes som:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^+$$

Eksempel 1

$$\text{Lad } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi har tidligere fundet den inverse matrix ved at udvide matricen med en enhedsmatrix og benyttet Gausselimination som vist her:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6,5 & -9,5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3,5 & -5,5 & 3 \end{pmatrix} \text{ og kan derefter se, at}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6,5 & -9,5 & 5 \\ -4 & 6 & -3 \\ 3,5 & -5,5 & 3 \end{pmatrix}$$

I stedet for Gausselimination vil vi nu finde A^{-1} ved at først at beregne alle underdeterminanterne:

$\det(M_{11}) = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 5 = 13$	$\det(M_{12}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 2 = 8$	$\det(M_{13}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7$
$\det(M_{21}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 15 = 19$	$\det(M_{22}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 6 = 12$	$\det(M_{23}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 4 = 11$
$\det(M_{31}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 12 = 10$	$\det(M_{32}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 9 = 6$	$\det(M_{33}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 6 = 6$

Herefter findes komplementerne A_{ij} ved multiplikation af underdeterminanterne med faktoren $(-1)^{i+j}$; de ses i tabellen herunder:

$A_{11} = 13$	$A_{12} = -8$	$A_{13} = 7$
$A_{21} = -19$	$A_{22} = 12$	$A_{23} = -11$
$A_{31} = 10$	$A_{32} = -6$	$A_{33} = 6$

Disse værdier benyttes til at opskrive den adjungerede matrix:

$$A^+ = \begin{pmatrix} 13 & -19 & 10 \\ -8 & 12 & -6 \\ 7 & -11 & 6 \end{pmatrix}$$

Endelig findes $\det(A)$ ved opløsning efter en række. Her anvendes række 3:

$$\det(A) = 2 \cdot 10 + 5 \cdot (-6) + 2 \cdot 6 = 20 - 30 + 12 = 2$$

Nu benyttes sætningen om den inverse matrix (se side 27):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^+ = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 13 & -19 & 10 \\ -8 & 12 & -6 \\ 7 & -11 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,5 & -9,5 & 5 \\ -4 & 6 & -3 \\ 3,5 & -5,5 & 3 \end{pmatrix}$$

Cramers regel

Lad $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ være en invertibel matrix; $A_3^{-1} = \frac{1}{\det(A_3)} \cdot A^+$

Vi ønsker at løse ligningen: $A_3 x = b$

Ved multiplikation (fra venstre) på begge sider af ligningen med den inverse matrix fås ligningen:

$$I \cdot x = \frac{1}{\det(A_3)} \cdot A^+ \cdot b \Leftrightarrow x = \frac{1}{\det(A_3)} \cdot A^+ \cdot b$$

Dvs. at her står ikke bare løsningen for en ligning, men en opskrift på at finde løsningen for enhver vektor b .

Hvis vi vil finde x_i , benyttes den i 'te række i A^+ , som svarer til komplementerne $A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{ni}$, og b .

$$(1) \quad x_i = \frac{1}{\det(A_3)} \cdot \sum_{j=1}^3 A_{ji} \cdot b_j = \frac{1}{\det(A_3)} \cdot ((A_{1i} b_1) + (A_{2i} b_2) + (A_{3i} b_3))$$

Dannes matrix B_3 ved at erstatte en af søjlerne (den i 'te og det vil sige her den 3.) med vektor b :

$$B_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix} \quad (\text{i eksemplet her er } i = 3)$$

vil vi finde $\det(B_3)$ ved opløsning efter søjlen b .

$\det(B_3) = b_1 \cdot B_{13} + b_2 \cdot B_{23} + b_3 \cdot B_{33}$, men i dette tilfælde er komplementerne i B_3 identisk med de tilsvarende i A (da de kun afhænger af matricernes 2 første søjle, som er identiske for matricerne A og B_3 .) Derfor fås:

$$(2) \quad \det(B_3) = b_1 \cdot B_{13} + b_2 \cdot B_{23} + b_3 \cdot B_{33} = b_1 \cdot A_{13} + b_2 \cdot A_{23} + b_3 \cdot A_{33}$$

Hvad der her gælder for $i=3$ gælder selvfølgelig også for $i=1$ og $i=2$. I (1) kan vi derfor erstatte sidste faktor og får:

$$(3) \quad x_i = \frac{\det(B_3)}{\det(A_3)}$$

hvilket er Cramers regel (som gælder generelt for invertible matricer af enhver orden.)

Produktreglen

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Øvelse 4

Lad $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ og $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Forklar, hvad der sker med matricen A , når den multiplicere fra venstre med en af de 3 andre *elementære matricer*. Beregn diskriminanten for A og hvert af de 3 produkter.

Gentag øvelsen, men multiplicer nu fra højre!

Opgaver

Opgave 1

Undersøg om de følgende matricer er invertible:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 2

Beregn $\det(A)$ ved hjælp af komplementerne, idet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -19 & 10 \\ 4 & -2 & -6 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opgave 3

Hvorledes beregnes følgende determinanter nemmest?

$$d_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 13 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, d_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 13 \\ 0 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ og } d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ -7 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

Opgave 4

For hvilke værdier af x er matricen A ikke invertibel?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ x & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Opgave 5

Lad A være en kvadratisk matrix af orden n . Vis

1. at multipliceres alle elementer i en række med k , vil også determinanten ændres med faktor k ,
2. at multipliceres matricen med k , vil determinanten ændres med faktor k^n

Opgave 6

Lad A være en kvadratisk matrix af orden n og λ et reelt tal. Vis:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0 \wedge Ax = \lambda x$$

Opgave 7

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= -1 \\ -2x + y &= 7 \end{aligned}$$

Løs ligningerne med Cramers formel. Kald de 3 determinanter hhv. D , D_x og D_y ;
du kan så finde løsningen som $\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right)$

Opgave 8

Find løsningen for x_2 i ligningssystemet, som her er vist med totalmatricen, med Cramers formel.

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 9

Beregn determinanten af A , hvor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opgave 10

Beregn determinanten af A , hvor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opgave 11

Beregn determinanten af A , hvor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -13 & 28 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Opgave 12

Find de værdier af k , for hvilke $\det\begin{pmatrix} k & 3 \\ -2 & k-2 \end{pmatrix}=0$:-)

Opgave 13

Find for ethvert reelt tal λ løsningsmængden til det homogene lineære ligningssystem:

$$\begin{array}{rcl} (3-\lambda)x & +y & = 0 \\ 2x & +(4-\lambda)y & = 0 \end{array}$$

Underrum og lineære transformationer

Linearkombinationer

Lad v være defineret som $v = \sum_i x_i \cdot v_i$, hvor x_i er en skalar og v_i er en vektor; så kaldes v en *linearkombination* af vektorerne.

Mængden af vektorer, der kan dannes på denne måde ved at anvende alle mulige kombinationer af skalarer, kaldes $\text{span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Eksempel

Lad

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ og } b = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ i ligningen } Ax = b.$$

Kaldes søjlevektorerne i A for a_i , $i=1,2,3$ og 4 ses, når ligningen skrives som vektorligningen:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 = b$$

at ligningen har en (evt. flere) løsning(er) hvis og kun hvis $b \in \text{span}(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

I dette tilfælde kan den tilsvarende totalmatrice med rækkeoperationer ændres til matricen

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hvoraf ses, at der findes løsninger. Ses på den første ligning, fremgår det, at x_3 og x_4 kan vælges frit og for alle valg af disse kan x_1 vælges så ligningen er sand. Tilsvarende gælder for den anden ligning. Den tredje ligning er sand for en hvilken som helst løsning. Her gælder: $b \in \text{span}(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

Havde b derimod været defineret som $b = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, ville $b \notin \text{span}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ og ligningen

ingen løsning have. Ved rækkeoperationerne vil der opstå en modstrid:

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

De to sidste rækker svarer til ligninger med ens venstresider, men med hhv. 7 og 6 som højresider. Det er ikke muligt. b kan ikke skrives som en linearkombination af søjlevektorerne.

Da $a_1 = a_2 - a_4$, ses at en linearkombination af de 4 søjlevektorer kan skrives om en linearkombination af de tre:

$$v = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 = x_1(a_2 - a_4) + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 = (x_1 + x_2)a_2 + x_3 a_3 + (x_4 - x_1)a_4$$

Da $a_2 = 0,5 a_3 + 0,5 a_4$ ses, at v også kan skrives som en linearkombination af a_3 og a_4 .

Dvs. at

$$\text{span}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \text{span}(a_2, a_3, a_4) = \text{span}(a_3, a_4)$$

Eksempel 2

Vi ser nu på det homogene ligningssystem svarende til (1) i forrige eksempel. Højresiden b erstattes altså af nulvektoren. Det er indlysende, at nulvektoren er en løsning, men hvad er den fuldstændige løsning?

Med rækkeoperationer kan matricen omskrives sådan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Havde vi skrevet totalmatricerne op ville de se ligesådan ud; blot skal der tilføjes en 5'te søjle med lutter nuller.

Den sidste matrix omskrives til ligninger (idet der ses bort fra den overflødige sidste):

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = -x_3 + x_4$$

$$x_2 = -x_3 - x_4$$

Nu tilføjes $x_3 = x_3$ og $x_4 = x_4$, så løsningen kan skrives på vektorform:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 + x_4 \\ -x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Da } x_3 \text{ og } x_4 \text{ er frie variable ses, at den}$$

fuldstændige løsning til det homogene ligningssystem er

$$\text{span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Øvelse 1

Kontroller alle detaljer i de to foregående eksempler, herunder alle rækkeoperationer og sammenhængen mellem søjlevektorerne.

Underrum

Et *underrum* U (af $\mathbb{R}^n$) er en delmængde af $\mathbb{R}^n$, hvorom der gælder:

1. $0 \in U$
2. $v_1, v_2 \in U \Rightarrow v_1 + v_2 \in U$
3. $\alpha \in \mathbb{R}, v \in U \Rightarrow \alpha v \in U$

(Underrummet siges at være lukket under vektoraddition og multiplikation med skalar.)

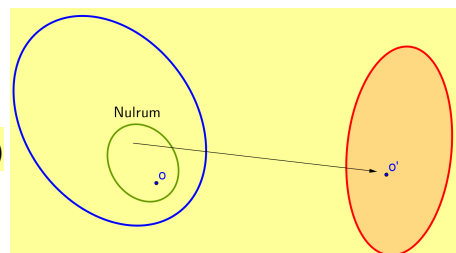
For underrummet findes der et endeligt antal vektorer, således at $U = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$. Vektorerne kaldes *frembringere* og siges at frembringe eller udspænde U .

Det mindste antal vektorer, der kan frembringe underrummet kaldes en *basis* for dette. Antallet af vektorer i en basis kaldes underrummets *dimension*.

Man kan vise, at enhver basis for et underrum indeholder samme antal vektorer; dimensionen er altså veldefineret.

Nulrum

Mængden af løsninger til det homogene ligningssystem $A_{mn}x = 0$ er et underrum som kaldes nulrummet ($N(A)$).



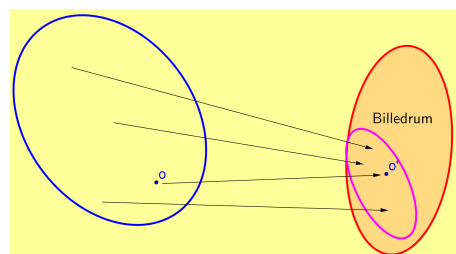
Øvelse 2

Vis, at $N(A)$ er et underrum, dvs. opfylder betingelserne 1. - 3. (se ovenfor.)

Søjlerummet eller billedrummet

Lad A være en matrix med m rækker og n søjler. Søjlerne udspænder et underrum af $\mathbb{R}^m$ (søjlerummet) som betegnes $R(A)$.

Ligningssystemet $Ax = b$ har netop en eller uendelig mange løsninger, når $b \in R(A)$



Dimensionsformlen

Er A en matrix med m rækker og n søjler gælder: $\dim(N(A)) + \dim(R(A)) = n$

$\dim(R(A))$ kaldes rangen af A .

Løsningsmængden til et ligningssystem

Givet ligningssystemet $Ax=b$ kaldes en tilfældig løsning x_0 fra løsningsmængden en *partikulær løsning*. Det kan være den eneste løsning eller en af mange.

Mængden af alle løsninger kaldes den *fuldstændige løsning* til ligningssystemet. Den fuldstændige løsning fås ved også at løse det tilsvarende homogene ligningssystem. Den fuldstændige løsning fås så som: $L = \{ x_0 + z \mid z \text{ er en løsning til den homogene ligning} \}$.

Øvelse 3

Vis, at $x_0 + z$ er en løsning, hvis x_0 er en partikulær løsning og z er en løsning til det tilsvarende homogene ligningssystem.

Vis også, at der ikke findes andre løsninger.

Standardbaser

I $\mathbb{R}^2$ er standardbasen $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Enhver vektor $v \in \mathbb{R}^2$, hvor $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, kan skrives som $v = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tilsvarende gælder i $\mathbb{R}^n$: Basis består af n vektorer $e_1, \dots, e_n$, hvor den i 'te vektor har 0 som koordinater alle steder undtagen i 'te koordinat, som er 1.

Øvelse 4

Skriv $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ som en linearkombination af de 4 vektorer i standardbasen.

Lineære transformationer defineret af en matrix A

Lineære transformationer er en funktionstype, hvor $\mathbb{R}^n$ er definitionsområdet og værdimængden er et underrum i $\mathbb{R}^m$. Underrummet kan blot være nulvektoren og det kan være hele $\mathbb{R}^m$. Sommetider benyttes også ordet *afbildning* som synonym for funktion og værdimængden kaldes så *billedmængden* eller *billedrummet*.

Definition

En lineær transformation L kendes på, at der for vilkårlige skalarer og vektorer gælder, at $L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$

Øvelse 5

Vis, at funktionen $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: L(v) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{v}$ er en lineær transformation.

Hvilken dimension har billedrummet?

Matricen for en lineær transformation

For enhver lineær transformation L findes der en entydigt bestemt tilsvarende matrix A , således at $Av = L(v)$.

Lad der være givet en lineær transformation $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Vi søger efter en matrix A , så:
 $\forall v \in \mathbb{R}^n: L(v) = Av$. Specielt skal det gælde for enhedsvektorerne $e_i, i=1, 2, \dots, n$.

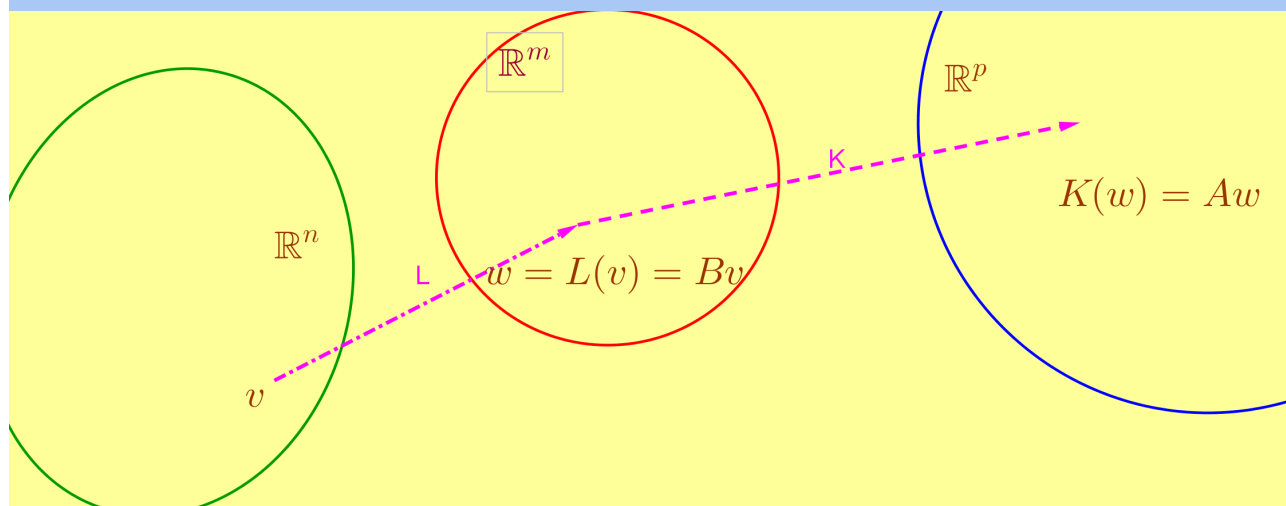
$L(e_i) = Ae_i = s_i$, hvor s_i er den i 'te søjle i A . Dvs. at søjlerne i A er bestemt af L . På den anden side: Defineres A som matricen $(L(e_1), L(e_2), \dots, L(e_{n-1}), L(e_n))$ ses, at

$$Av = A\left(\sum v_i e_i\right) = \sum v_i Ae_i = \sum v_i L(e_i) = L\left(\sum v_i e_i\right) = L(v)$$

Sammensætning af lineære transformationer

Lad L og K være lineære transformationer med tilhørende matricer B og A .

Så er $(KL)(v) = K(L(v)) = K(Bv) = ABv$; den sammensatte transformation har altså den tilhørende matrix AB .



Er T en lineær transformation med en omvendt funktion T^{-1} , er denne en lineær transformation og har T den tilhørende matrix A , har T^{-1} den tilhørende matrix A^{-1} .

Øvelse 6

Lad $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Hvis A har en invers matrix, findes denne.

Definer den lineære transformation $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ved $L(x) = Ax$

Idet $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, løses ligningen $Ax = b$ som $x = A^{-1}Ax = A^{-1}b$

Geometrisk fortolkning af lineære transformationer

Øvelse 7

I GeoGebra defineres $t=1$; lav en skyder for denne variabel.

Definer matricen $R = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ og vektoren $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dan produktet $u = Rv$.

Benyt skyderen.

Forklar hvad der sker? Hvorfor sker det? Hvorfor mon matricen er kaldt R ?

Hjælp: Tegn søjlevektorerne i R (og farv dem røde.) Farv også u rød.

Mere hjælp: Skriv u som en linearkombination af de røde vektorer.

Øvelse 8 (Additionsformlerne)

Definer rotationsmatricer som ovenfor med rotationerne hhv. t , s og $s+t$. Hvis v roteres først vinklen t , så vinklen s fås vektoren $R_s R_t v = R_{s+t} v$. Dette gælder for enhver vektor og derfor er matricerne på hver side af lighedstegnet ens. Beregn dem og sammenlign alle indgange (elementer.) Renskriv formlerne.

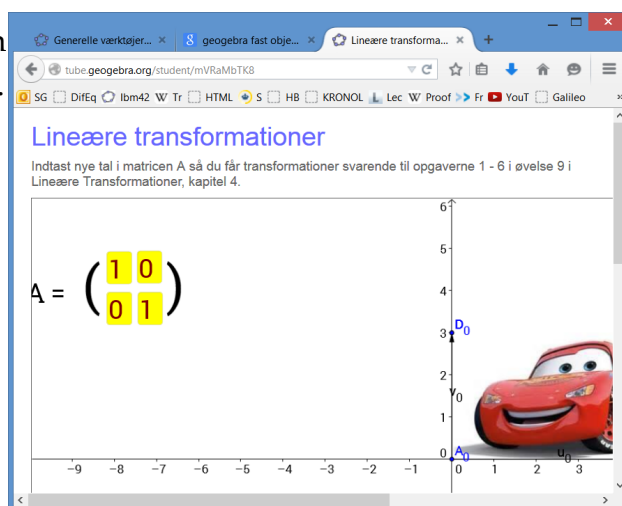
Indsæt specielt $s=t$. Hvilke formler fås så?

Øvelse 9

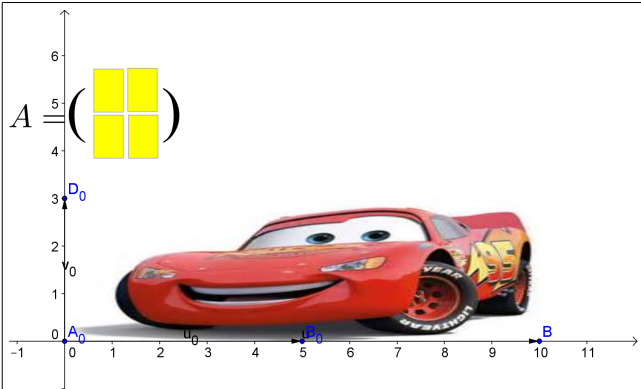
Benyt linket herunder, hvor du ser bilen til højre:

Matricen A definerer en lineær transformation som bilen transformeres med.

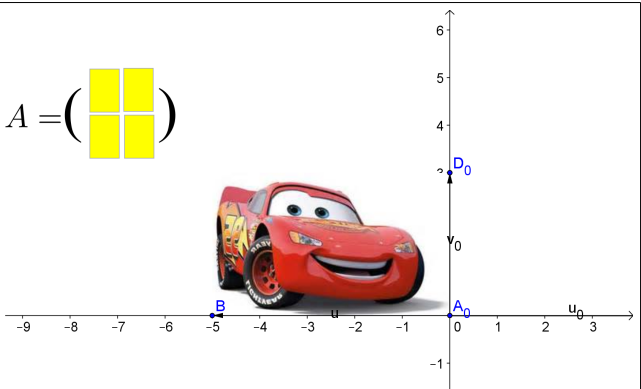
Find de matricer, som giver resultaterne, du kan se på næste side i tabellen.



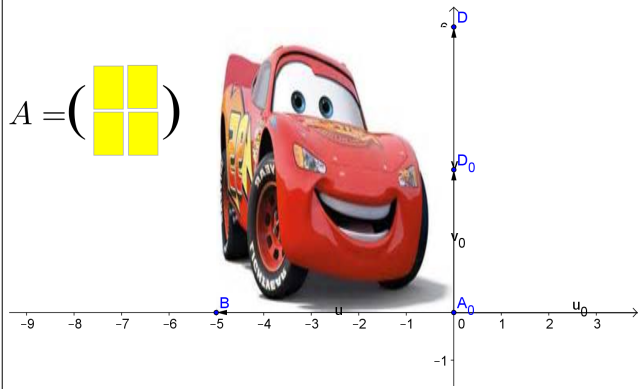
<https://www.geogebra.org/m/o6Q6YECp#material/VRaMbTK8>



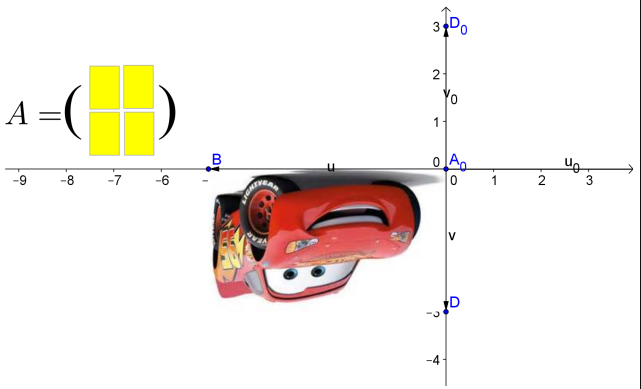
Opgave 1



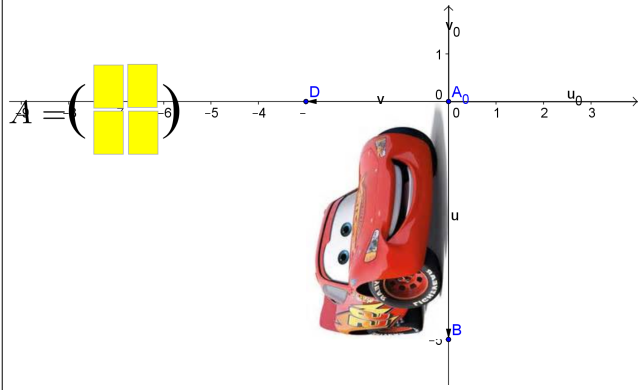
Opgave 2



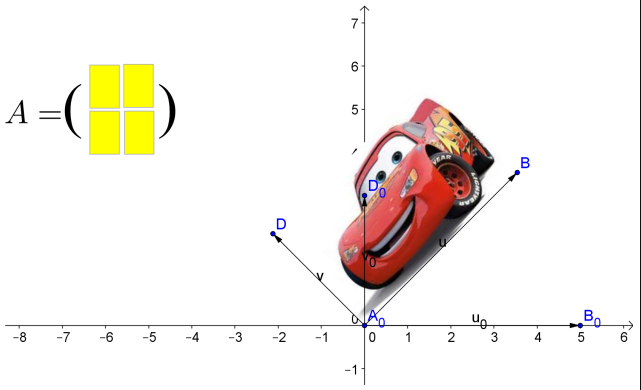
Opgave 3



Opgave 4



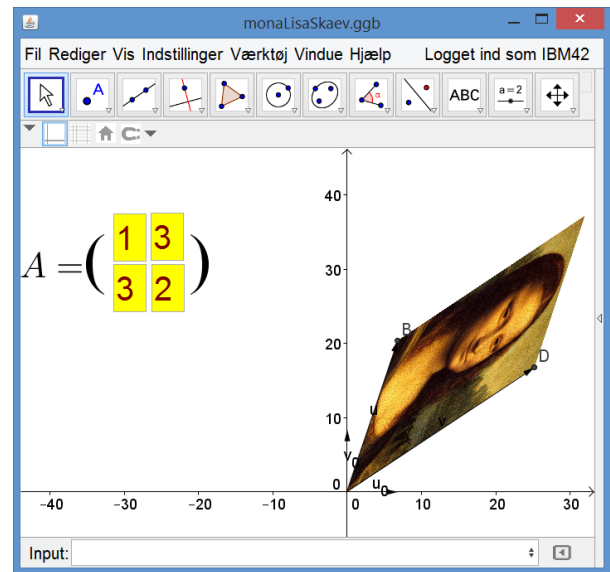
Opgave 5



Opgave 6 (Bem.: $\text{vinkel}(\vec{u}, \vec{u}_0) = \pi/4$)

Øvelse 10

Se på Mona Lisa i GeoGebraBook: MatematikA, kapitel 10. (Link til bogen står under billedet.) Undersøg, hvorledes hun spejles, trækkes i og skævvrides, blandt andet ved at kombinere en række lineære transformationer.



<https://www.geogebra.org/m/o6Q6YECp#chapter/27235>

Opgaver

Opgave 1

Beregn linearkombinationerne:

1. $(4,7)-(2,3)+4*(1,3)$
2. $4(1,0)+3*(0,1)$

Opgave 2

Skriv udtrykkene som linearkombinationer af vektorene u , v og w :

3. $7u+3v-2u$
4. $4(u-2v)-3(2u+v)$
5. $0(u+3v-w)+5o$

Opgave 3

Givet vektorene $u=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $x=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ skal du

6. skrive x som en linearkombination af de tre første og
7. vise, at y ikke kan skrives som en linearkombination af de tre første.

Opgave 4

Beregn vektoren x , som opfylder ligningen $\sqrt{2}x-\sqrt{2}u+v=o$, hvor $u=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Opgave 5

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

8. Find en basis for nulrummet $N(A)$
9. Bestem dimensionen af billedrummet $R(A)$
10. Find en basis for billedrummet

Opgave 6

Find matricen svarende til den lineære transformation L , hvor

$$L((x, y)) = (x + y, y, 2x + 3y)$$

Opgave 7

Find matricen svarende til den lineære transformation L , hvor

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, T(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, T(v) = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Opgave 8

For vilkårlige vektorer u og v skal du vise:

11. $\text{span}(u, v) = \text{span}(u, u+v)$
12. $\text{span}(u, v) = \text{span}(u-v, v)$
13. $\text{span}(u, v) = \text{span}(u+v, u+v)$

Opgave 9

Tilhører vektoren $(-3, 7, 7)$ $\text{span}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$?

Opgave 10

Find matricen for den lineære afbildning $f(x, y) = (2y, x-y)$

Opgave 11

Givet funktionen $f(x, y) = 3x - 2y$. Vis:

14. at f er lineær og
15. find matricen for f .

Opgave 12

Betrakt den lineære funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ givet ved $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Angiv den tilsvarende matrix.

Projektioner og ortogonalitet

Definition af prikproduktet

Prikproduktet af to vektorer u og v tilhørende R^n defineres som

$$u \cdot v = \sum u_i \cdot v_i$$

Andre navne for det samme begreb er: *skalarprodukt* (for det er en skalar / et tal) eller *det indre produkt*.

Sætninger om prikproduktet

Idet $u, v, w \in R^n$ og α er en skalar gælder:

1. $u \cdot u \geq 0$
2. $u \cdot v = v \cdot u$
3. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
4. $u \cdot (\alpha v) = \alpha (u \cdot v)$
5. $u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = o$

Øvelse 1

Vis ovenstående 5 sætninger.

Normen af en vektor

Normen eller længden af en vektor u defineres som $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$.

Afstanden mellem to vektorer er normen af differensen mellem vektorerne.

Øvelse 2

Idet $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ skal du beregne længderne af vektorerne og afstanden mellem dem.

Sætninger om prikproduktet

Idet $u, v \in R^n$ og α er en skalar gælder:

6. $\|u\| \geq 0$
7. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = o$
8. $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$

Øvelse 3

Vis ovenstående 3 sætninger.

Eksempel fra $\mathbb{R}^2$

- Hvis $u = \alpha(\cos(t), \sin(t))$ og $v = \beta(\cos(t + \pi/2), \sin(t + \pi/2)) = \beta(-\sin(t), \cos(t))$ ses, at vektorerne står vinkelret på hinanden og at deres prikprodukt er $\alpha\beta(-\cos(t) \cdot \sin(t) + \sin(t) \cdot \cos(t)) = 0$.
- Omvendt gælder også: Hvis vektorerne står vinkelret på hinanden, kan de skrives som u og v ovenover, og deres prikprodukt er 0.
- Endvidere: Hvis prikproduktet er nul, og vektorernes vinkel med x-aksen er hhv. s og t , kan dette skrives som $\alpha\beta(\cos(t) \cdot \cos(s) + \sin(t) \cdot \sin(s)) = \cos(t-s) = 0$. Heraf følger, at vinklen $t-s$ er ret.

Projektion i $\mathbb{R}^2$

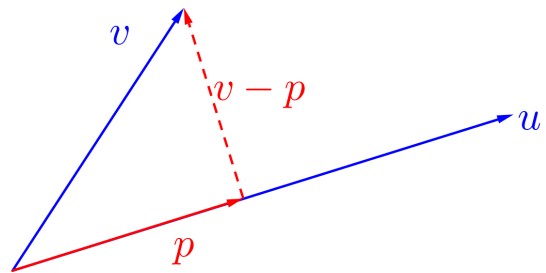
Projektion af vektoren v på vektoren $u \neq 0$ defineres som vektoren $p = \alpha \cdot u$ hvor $u \perp (v - p)$.

Tallet α bestemmes så af ligningen:

$$\begin{aligned} u \cdot (v - p) &= 0 \Leftrightarrow \\ u \cdot (v - \alpha \cdot u) &= 0 \Leftrightarrow \\ u \cdot v - u \cdot (\alpha \cdot u) &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha &= \frac{u \cdot v}{u \cdot u} \end{aligned}$$

hvorefter

$$p = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u \quad ^5$$



Man kan også stille spørgsmålet: Hvilken værdi af α vil gøre afstanden mellem vektorerne u og v (dvs. længden af $v - p$) mindst mulig?

Ortogonale vektorer i $\mathbb{R}^n$

To vektorer siges at være ortogonale (eller vinkelrette på hinanden), hvis deres prikprodukt er nul.

Pythagoras sætning i $\mathbb{R}^n$

Hvis u og v er ortogonale, er $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Bevis

Antag, at u og v er ortogonale:

$$\|u + v\|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = u \cdot (u + v) + v \cdot (u + v) = u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Projektion af vektorer i $\mathbb{R}^n$

Analogt med resultatet side 45 defineres projektionen af vektor v på vektor u som

⁵ Sammenlign med Projektionsvektor, Vektorer i Planen, Vektorer (IM 2014)

$$p = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u, \text{ hvor } u \text{ er en egentlig vektor.}$$

Lemma

Vektorerne p og $v-p$ er ortogonale.

Vi beregner de to vektorers prikprodukt:

$$p \cdot (v-p) = p \cdot v - p \cdot p = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u \cdot v - \left(\frac{u \cdot v}{u \cdot u} u \right) \cdot \left(\frac{u \cdot v}{u \cdot u} u \right) = \frac{(u \cdot v)^2}{u \cdot u} - \frac{(u \cdot v)^2}{(u \cdot u)^2} u \cdot u = 0 \quad \text{og da dette er}$$

nul, er vektorerne ortogonale.

Cauchy-Schwartz' ulighed

For to vektorer $u, v \in \mathbb{R}^n$ gælder Cauchy-Schwartz' ulighed:

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Bevis

Idet p er projektionen af v på u , er p og $(v-p)$ ortogonale og $p = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u$. Pythagoras sætning benyttes på de to ortogonale vektorer:

$$\|p\|^2 \leq \|p\|^2 + \|v-p\|^2 = \|p+(v-p)\|^2 = \|v\|^2$$

Ved indsættelse fås så

$$\left\| \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u \right\|^2 \leq \|v\|^2 \Leftrightarrow \left(\frac{u \cdot v}{u \cdot u} \right)^2 \cdot (u \cdot u) \leq \|v\|^2 \Leftrightarrow \frac{(u \cdot v)^2}{u \cdot u} \leq \|v\|^2 \Leftrightarrow (u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2 \Leftrightarrow |u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$$

Bemærk, at selvom beviset ikke er korrekt, når u er nulvektoren, gælder uligheden dog også i dette tilfælde. Overvej, at der kun gælder lighedstegn, når en af vektorerne u eller v er nulvektoren eller $v-p$ er nulvektoren. Hvad betyder det sidste for vektorerne u og v ?

Trekantsuligheden

For to vektorer $u, v \in \mathbb{R}^n$ gælder trekantsuligheden:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Bevis

Da $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2 \cdot u \cdot v + \|v\|^2$ (se side 45) fås

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2 \cdot u \cdot v + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$, hvor Cauchy-Schwartz' ulighed og kvadratsætningen er benyttet. Trekantsuligheden følger nu umiddelbart ved at tage kvadratroden på begge sider.

Vinklen mellem 2 vektorer i $\mathbb{R}^n$

Lad $u, v \in \mathbb{R}^n$ være egentlige vektorer. Så defineres vinklen $\theta, (0 \leq \theta \leq \pi)$ mellem dem som vinklen, hvor $\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$

- Bemærk, at ifølge Cauchy-Schwartz' sætning gælder, at $-1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1$.
Vinklen er derfor entydigt defineret.
- Bemærk, at $\cos(\theta) = \frac{u}{\|u\|} \cdot \frac{v}{\|v\|}$; dvs. prikproduktet af to enhedsvektorer med samme retning som hhv. u og v .
- Længden af projektionen af v på u er så:
$$\|p\| = \frac{|u \cdot v|}{\|u\|^2} \|u\| = \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \cdot \|v\|} \|v\| = |\cos(\theta)| \|v\| = \|v\| |\cos(\theta)|$$

Øvelse 4

Lad $u, v \in \mathbb{R}^n$ være egentlige vektorer. Beregn længderne af disse samt længden af $v-u$.
Lad der være givet en trekant i plangeometrien med disse sidelængder. Beregn med cosinusrelationerne $\cos$ til vinklen mellem siderne svarende til u og v , og sammenlign resultatet med definitionen ovenover.

Lemmer

Lad $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ og at de to første vektorer udgør en basis for underrummet $U = \text{span}(u, v)$.
Vi ønsker at finde den vektor i U , der er nærmest ved w .

Antag, at p er en vektor i U , således at $w-p$ er ortogonal på alle vektorer i U . Lad x være en vilkårlig anden vektor i U . Da både p og x er vektorer i U , gælder det også for $p-x$, som derfor ifølge antagelsen står vinkelret på $w-p$. Derfor kan Pythagoras sætning benyttes:

$$\|w-x\|^2 = \|(w-p) + (p-x)\|^2 = \|(w-p)\|^2 + \|(p-x)\|^2$$

Heraf ses, at p er nærmest ved w ; kun hvis $x=p$ vil x være lige så tæt på.

Næste spørgsmål: Findes der en sådan vektor p , så $w-p$ står vinkelret på alle vektorer i U ?
Det gælder hvis og kun hvis

$$(w-p) \cdot u = 0 \wedge (w-p) \cdot v = 0$$

fordi alle vektorer i U er linearkombinationer af u og v .

Hvis vi skriver $p = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$, skal vi altså vise, at de to ligninger har løsninger for α og β .

Ved indsættelse fås:

$$\begin{cases} (w - \alpha \cdot u - \beta \cdot v) \cdot u = 0 \\ (w - \alpha \cdot u - \beta \cdot v) \cdot v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w \cdot u - \alpha \cdot u \cdot u - \beta \cdot v \cdot u = 0 \\ w \cdot v - \alpha \cdot u \cdot v - \beta \cdot v \cdot v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \cdot u & v \cdot u \\ u \cdot v & v \cdot v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \cdot u \\ w \cdot v \end{pmatrix}$$

Beregnes determinanten for matricen fås $\|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - (u \cdot v)^2$; det følger så af Cauchy-Schwartz' ulighed at **determinanten er positiv**, da basisvektorerne ikke kan være multipla af hinanden.

Projektion på et underrum i $\mathbb{R}^n$

Definition af projektion på underrum

Lad $U \subseteq \mathbb{R}^n$ og $w \in \mathbb{R}^n$: så er projektionen af w den entydigt bestemte vektor p , for hvilken $w-p$ er ortogonal på alle vektorer i U .

Definition af afstand fra vektor til underrum

Med betegnelserne fra forrige definition, er afstanden $\|w - p\|$

Sætning om afstanden

Projektionen p er den vektor i U , som har den mindste afstand til w

Sætning om projektionen

Lad $U \subseteq \mathbb{R}^n$ være et underrum med en basis $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ og lad $w \in \mathbb{R}^n$. Så eksisterer projektionen p af w på U og p kan skrives som linearkombinationen:

$$p = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i, \text{ hvor } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \text{ er løsninger til ligningssystemet}$$

$$(1) \quad \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \cdots & v_1 \cdot v_k \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \cdots & v_2 \cdot v_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & v_k \cdot v_2 & \cdots & v_k \cdot v_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \cdot v_1 \\ w \cdot v_2 \\ \vdots \\ w \cdot v_k \end{pmatrix}$$

Bevis

Hvis der findes en projektion p i U , kan den skrives som den anførte linearkombination. Da $w-p$ står vinkelret på enhver vektor i U , står den også vinkelret på de k basisvektorer, hvilket giver os k ligninger til bestemmelse af koefficienterne.

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, k\}: v_j \cdot (w - p) = 0 \Leftrightarrow v_j \cdot (w - \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i) = 0 \Leftrightarrow v_j \cdot w = v_j \cdot \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i v_j \cdot v_i = w \cdot v_j$$

Det ses nemt, at disse ligninger er ensbetydende med matrixligningen i sætningen. Der tilbagestår nu blot at vise, at ligningen har en løsning.

Kaldes matricen, hvis elementer er prikprodukter af basisvektorerne fra U , for M , vil vi vise, at $\det(M) \neq 0$, da ligningen så kan løses og har en entydig bestemt løsning. Det er ensbetydende med, at søjlevektorerne i M er lineært uafhængige. Kald søjlevektorerne

$$m_1, m_2, \dots, m_k$$

Nu antages, at det ikke er tilfældet, men at der eksisterer en linearkombination, hvor ikke alle koefficienter er nul, således at $\sum_{i=1}^{i=k} a_i \cdot m_i = \vec{0}$.

Når de to vektorer er ens, skal alle k koordinater være ens (og definitionen på m_i benyttes

$$(se (1)): \sum_{i=1}^{i=k} a_i \cdot m_i = \vec{0} \Rightarrow \forall j \in \{1, 2, \dots, k\}: \sum_{i=1}^{i=k} a_i \cdot v_j \cdot v_i = 0$$

Fra regler om prikprodukter vides, at der kan byttes om på rækkefølgen af faktorer og at den fælles faktor så kan sættes udenfor en parentes:

$$\sum_{i=1}^{i=k} a_i \cdot m_i = \vec{0} \Rightarrow \forall j \in \{1, 2, \dots, k\}: \sum_{i=1}^{i=k} a_i \cdot v_j \cdot v_i = 0 \Rightarrow \forall j \in \{1, 2, \dots, k\}: v_j \cdot \sum_{i=1}^{i=k} a_i \cdot v_i = 0$$

Kaldes $u = \sum_{i=1}^{i=k} a_i \cdot v_i$, ses at vektoren u er en bestemt linearkombination af basisvektorerne i U forskellig fra nulvektoren og dermed en egentlig vektor i U .

u står vinkelret på alle basisvektorerne i U , da prikprodukterne er nul. Men så står u vinkelret på sig selv, og $u \cdot u = 0$, og så er u nulvektoren hvilket medfører

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, k\}: a_j = 0 \text{ i modstrid med, at ikke alle koefficienterne er nul.}$$

Søjlevektorerne i M er altså lineært uafhængige, $\det(M) \neq 0$, M^{-1} findes og der eksisterer en løsning til ligningen.

Sætning: Beregning af koefficienter til p

Lad $U \subseteq \mathbb{R}^n$ være et underrum med en basis $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ og lad $w \in \mathbb{R}^n$. Kaldes matricen, hvis søjlevektorer er underrummets basisvektorer, for A , kan

1. M skrives som $A^T \cdot A = M$ og

2. højresiden i ligning (1) er $A^T \cdot w$

$$3. \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T w$$

$$4. \quad p = A\alpha = A(A^T A)^{-1} A^T w$$

Bevis

1. Elementet m_{ij} i M er prikproduktet af vektorerne v_i og v_j ; det er netop samme resultat som produktet af den i 'te række i A^T og den j 'te søjle i A .
2. Tilsvarende er produktet af den i 'te række i A^T (dvs. v_i) og w netop det i 'te element i højresiden af ligning (1).
3. Ligningssystemet (1) kan derfor skrives:
 - $A^T A \alpha = A^T w$ og da $M = A^T \cdot A$ er invertibel, fås
 - $\alpha = (A^T A)^{-1} A^T w$
4. Da $p = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = A \alpha$ fås påstanden 4. ved indsættelse af resultatet fra 3.

Bemærkninger

Kald $P = A(A^T A)^{-1} A^T$; så er $p = P w$ og p er funktionsværdien (eller billedet) af den lineære transformation svarende til matricen P .

Øvelse 5

Find og reducer matricen PP .

Hvilken lineær transformation svarer det til og hvordan skal udtrykket tolkes?

Hvilket underrum er billedrummet for P ?

Hvilke vektorer tilhører nulrummet for P ?

Projektion på et underrum med ortogonal basis

For et underrum med ortogonal basis gælder, at prikprodukterne $v_i \cdot v_j = 0$ for $i \neq j$ og dermed løses ligningssystemet (sammenlign med sætningen side 48)

$$\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \cdots & v_1 \cdot v_k \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \cdots & v_2 \cdot v_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & v_k \cdot v_2 & \cdots & v_k \cdot v_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \cdot v_1 \\ w \cdot v_2 \\ \vdots \\ w \cdot v_k \end{pmatrix}$$

nemt, da matricen til venstre bliver en diagonalmatrix: $\alpha_i = \frac{w \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}$

Hermed fås $p = \sum_{i=1}^k \frac{w \cdot v_i}{v_i \cdot v_i} v_i$

Hvis basis er ortonormal (dvs. $\forall i \in 1, 2, \dots, k : v_i \cdot v_i = 1$) fås: $p = \sum_{i=1}^k (w \cdot v_i) v_i$

Mindste kvadraters metode

Problemet

Forestil dig, at du vil finde en eller anden sammenhæng mellem variable i "den virkelige verden". Det kan være sammenhængen mellem tiden og kaffens temperatur, vægten og fjederens udstrækning, kalorieforbruget og vægtændringen osv. Afhængig af hvilken sammenhæng der er tale om, kan du have forestillinger sammenhængens type: lineær, eksponentiel eller noget tredje. For at kunne finde parametre i modellen indsamles data, men ligningssystemet vil normalt ikke have en løsning, da data på grund af målefejl (eller påvirkning af ukontrollerede variable) ikke passer perfekt i i den teoretiske funktionssammenhæng.

Antag, at vi vil finde en lineær sammenhæng $y = ax + b$ ved hjælp af de målte data i tabellen herunder:

x	2	5	7	10
y	6	10	11	16

Disse punkter ligger ikke præcist på en ret linje, men det er muligt at finde en linje ved lineær regression, som passer nogenlunde. (Se tegningen til højre.)

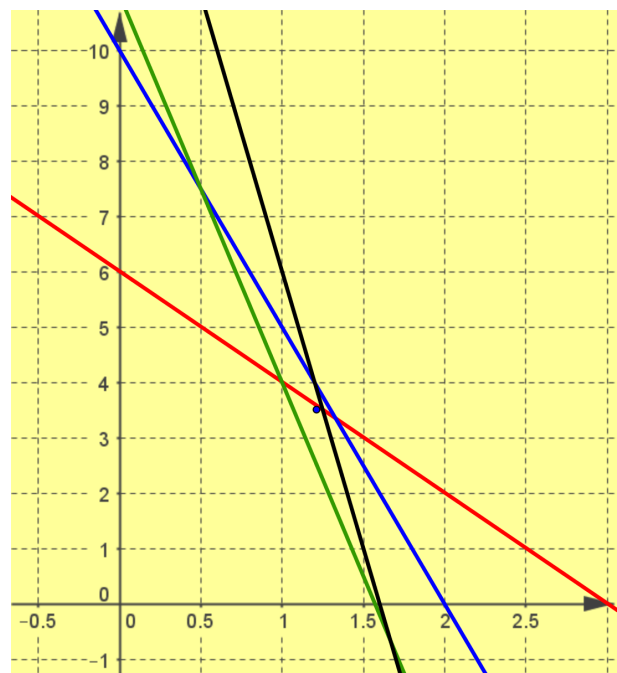
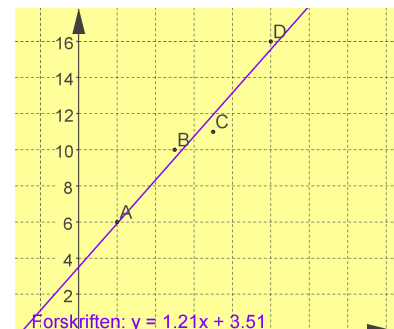
Hvis punkterne lå perfekt på en ret linje ville parametrene kunne findes som løsning til følgende ligninger:

$$\begin{aligned} 6 &= a \cdot 2 + b \\ 10 &= a \cdot 5 + b \\ 11 &= a \cdot 7 + b \\ 16 &= a \cdot 10 + b \end{aligned} \quad \text{som kan skrives som}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Hvis vi vil løse ligningssystemet grafisk, fås tegningens linjer – og mere end 1 skæringspunkt. Hvad skal så vælges som parametre?

Regressionslinjens parametre er benyttet til at markere punktet (a_r, b_r) . Men hvordan skal disse beregnes?



Metoden

$$\text{Lad } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ og } y = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Vi skal finde den linearkombination af søjlevektorerne i A , som er nærmest y (som er vektoren bestående af målepunkternes y -værdier). Med det indførte afstandsbebegreb er det projektionen af y på underrummet $U = \text{span}(a_1, a_2)$, hvor a_i er søjlevektorerne i A .

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 178 & 24 \\ 24 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A^T y = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 299 \\ 43 \end{pmatrix}$$

Vi søger nu $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ som løsningen til $A^T A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^T y$

$$\det(A^T A) = 178 \cdot 4 - 24 \cdot 24 = 136$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{136} \begin{pmatrix} 4 & -24 \\ -24 & 178 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{136} \begin{pmatrix} 4 & -24 \\ -24 & 178 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 299 \\ 43 \end{pmatrix} = \frac{1}{136} \begin{pmatrix} 164 \\ 478 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,206 \\ 3,515 \end{pmatrix}$$

som du bedes sammenligne med regressionslinjens parametre på forrige side.

Bedste rette linje (Definition)

Den bedste rette linje gennem n punkter i planen med koordinater $(x_i, y_i), i=1, 2, \dots, n$ er linjen med ligningen $y = ax + b$ hvor parametrene minimerer summen af de kvadrerede afstande:

$$D = \sum_{i=1}^{i=n} (ax_i + b - y_i)^2$$

Bemærk

$$D = \sum_{i=1}^{i=n} (ax_i + b - y_i)^2 = \left\| A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - y \right\|^2$$

Bedste rette linje (Sætning)

D er mindst mulig, når $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er projektionen af y på søjlerummet $R(A)$.

a og b findes som løsning til $A^T A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^T y$ (Normalligningen.)

Generalisering af mindste kvadraters metode

Metoden kan også benyttes på andre funktionstyper med to eller flere parametre.

Ekspontielle funktioner

Sammenhængen $y = b a^x$ omskrives til $\ln(y) = \ln(b) + x \ln(a)$. I matricen A optræder som før rækkevektorerne $(x_i, 1)$, men i søjlevektoren y optræder $\ln(y_i)$. Metoden bestemmer så i første omgang $\ln(a)$ og $\ln(b)$.

Polynomier

I princippet kan polynomier af enhver grad bestemmes på samme måde. Der forudsættes, at antallet af datasæt normalt er større end antallet af parametre. I matricen A optræder rækkevektorerne $(x_i^2, x_i, 1)$. y -vektoren består som for den lineære sammenhæng af de målte y -værdier.

Lad der fx være givet punkterne $(-1,7)$, $(0,3)$, $(1,4)$, $(2,9)$ og $(3,17)$. Den søgte sammenhæng er af typen $f(x) = a x^2 + b x + c$.

Ve indsættelse af første punkts koordinater fås: $a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c = 7$. Tilsvarende ligninger fås med de andre punkter. Ligningssystemet kan så skrives:

$$A \alpha = b, \text{ hvor } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ og } y = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \\ 17 \end{pmatrix} \text{ og ligningssystemet omskrives:}$$

$$A \alpha = b \Leftrightarrow A^T A \alpha = A^T b \Leftrightarrow (A^T A)^{-1} (A^T A) \alpha = (A^T A)^{-1} A^T b \Leftrightarrow \alpha = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Ved indsættelse fås:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 9 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A^T A = \begin{pmatrix} 99 & 35 & 15 \\ 35 & 15 & 5 \\ 15 & 5 & 5 \end{pmatrix}, (A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,07 & -0,14 & -0,07 \\ -0,14 & 0,39 & 0,04 \\ -0,04 & 0,04 & 0,37 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1,4 \\ 3,4 \end{pmatrix}$$

Øvelse 6

Gentag beregningerne med papir og blyant og find desuden forskriften med GeoGebra.

Det ortogonale komplement

Idet U er et underrum i $\mathbb{R}^n$, kaldes mængden af vektorer, der er ortogonale på alle vektorer i U , for det ortogonale komplement og betegnes $U^\perp$.

Øvelse 7

Vis, at det ortogonale komplement er et underrum.

Eksempel

Matricen A bringes på echelonform:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -10 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2,5 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

For at finde nulrummet $N(A)$ løses ligningen: $Ax = 0$; det ses af den sidste matrix, at der er én fri variabel x_3 ; lad $x_3 = 1$ så findes de to øvrige variable ved at løse ligningssystemet:

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 2 \cdot 1 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2,5 \cdot 1 = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -2,5 \end{pmatrix}$$

Heraf ses, at vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -2,5 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en vektor i nulrummet; bemærk at den er ortogonal på

alle 3 rækkevektorer i A (Prikproduktet er 0). Ethvert multiplum af vektoren er også ortogonal på disse vektorer og ligger dermed i nulrummet. Bemærk også, at den udspænder nulrummet, thi vælger vi en anden værdi til den frie variable, ændres de øvrige proportionalt hermed og der fås en vektor, som er et multiplum af den første.

Opgaver

Opgave 1

Find prikproduktet af vektorerne v og v , v og u , u og v , v og w , og endelig w og v , hvor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } w = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$$

Er der nogle af vektorerne, der er ortogonale?

Find en linearkombination af vektorerne v og u , der er ortogonal på w . (Spiller det nogen rolle, hvilken værdi x har?)

Find alle linearkombinationer af vektorerne v og u , der er ortogonale på w .

Opgave 2

$$\text{Lad } v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Find én vektor, der står vinkelret på v .

Find flere vektorer, der står vinkelret på v . De skal alle være lineært uafhængige.

Hvor mange kan der findes i alt?

Beskriv så mængden af alle vektorer, der står vinkelret på v .

Opgave 3

$$\text{Lad } v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Find projektionen af u på v .

Benyt formelen: $p = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{w \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}$, som gælder for en projektion af w på et underrum udspændt af de ortogonale vektorer v_i .

Find afstanden fra u til underrummet udspændt af v .

Opgave 4

$$\text{Lad } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vis, at u og v er ortogonale. Lad U være det underrum de udspænder.

Find projektionen af w på U .

Find afstanden fra w til U .

Find projektionsmatricen med formelen $P = A(A^T A)^{-1} A^T$

Beregn Pw og sammenlign med det tidligere fundne resultat

Opgave 5

$$\text{Find matricen for projektionen på underrummet } U = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Find matricen for projektionen på underrummet } U = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Opgave 6

$$\text{Find vinklerne mellem vektorerne } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ hhv. } w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ^6$$

Opgave 7

$$\text{Lad } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vis, at u og v er lineært uafhængige

6 Vinkler mellem egentlige vektorer i $\mathbb{R}^n$ defineres som løsningen til ligningen

$$\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}, 0 \leq \theta \leq \pi$$

Vis, at w kan skrives som en linearkombination af de to første.

Find projektionen af z på $\text{span}(u, v, w)$

Opgave 8

Vis, at Cauchy-Schwartz ulighed gælder for de to vektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Beregn vinklen mellem vektorerne

Vis, at trekantsuligheden gælder

Opgave 9

Benyt prikprodukt og norm til at vise

$$* \quad \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2$$

Benyt så (*) til at vise, at

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad \text{og}$$

$$\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4u \cdot v$$

Opgave 10

$$\text{Lad } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad U = \text{span}(u, v)$$

Hvilken dimension har U ?

Find den vektor i U , der har den mindste afstand til w .

Opgave 11

For de følgende 5 par af vektorer beregnes projektionerne af den første på den anden og af den anden på den første.

$$1. \quad u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad u = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$5. \quad u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 12

$$\text{Lad } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ og } U = \text{span}(u, v)$$

$$\text{Find projektionen af enhedsvektorerne } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ på } U$$

Opgave 13

Find underrummet af løsninger til det homogene ligningssystem: $\begin{matrix} 2x & +2y & +z=0 \\ 4x & +5y & +3z=0 \end{matrix}$ og

find projektionen af $(7,3,15)$ på dette underrum.⁷

Opgave 14

$$\text{Lad } u = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } U = \text{span}(u, v)$$

Hvilken dimension har U ?

Find den vektor i U , der har den mindste afstand til w .

Opgave 15

$$\text{Lad } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } U = \text{span}(u, v)$$

Find den vektor i U , der har den mindste afstand til w .

Opgave 16

$$\text{Lad } u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ og } U = \text{span}(u, v)$$

Vis, at $U = \text{span}(u, w) = \text{span}(v, w)$

Beregn projektionsmatricen P fra $\mathbb{R}^n$ til U

$$\text{Beregn projektionen } p \text{ af } z = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ på } U$$

⁷ Prøv også at skrive totalmatricen for ligningssystemet og anvend kommandoen `ReducedRowEchelonForm[<matrix>]`

Opgave 17

Lad $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ og $U = \text{span}(u_1, u_2)$

Antag, at det yderligere gælder, at $U = \text{span}(v_1, v_2)$

Find eksempler på vektorer $\vec{v}_i$, hvor den følgende ligning er sand og eksempler på, at den ikke altid er sand:

$$\vec{p}_U = \vec{P}_{\vec{u}_1} + \vec{P}_{\vec{u}_2}$$

Hvad skal der gælde om vektorerne, der udspænder U , for at ligningen er sand?

Opgave 18

Lad $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $U = \text{span}(u_1, u_2)$

Find projektionen p af u_2 på u_1

Vis, at u_1 og $u_2 - p$ er ortogonale

Find en ortonormal basis for U

Opgave 19

Find løsningen, der bedst opfylder ligningerne:
$$\begin{array}{rcl} x & +2y & =4 \\ -x & +3y & =1 \\ x & -y & =0 \end{array}$$
 med mindste kvadraters metode.

Opgave 20

Find løsningen til ligningerne:
$$\begin{array}{rcl} x & +2y & +z=8 \\ -x & +3y & -z=2 \\ x & -y & +2z=5 \end{array}$$
 med mindste kvadraters metode.

Løs også ligningerne med den sædvanlige metode og sammenlign resultaterne.

Kommenter resultatet.

Opgave 21

Givet observationerne i tabellen, skal du finde en eksponentiel funktion, som beskriver sammenhængen, med mindste kvadraters metode.

x	-3	1	5	7	10
y	12	17	24	29	39

Opgave 22

Givet observationerne i tabellen, skal du finde en polynomium af 3. grad, som beskriver sammenhængen, med mindste kvadraters metode.

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	2	3	9	25

Opgave 23

Givet observationerne i tabellen, skal du finde en potensfunktion, som beskriver sammenhængen, med mindste kvadraters metode. (Benyt den logaritmiske sammenhæng mellem variableerne.)

x	0,5	1	3	5	10
y	7,0	10,1	18,7	25,9	37,3

Eigenverdier og egenvektorer

Definitioner

Lad A være en givet kvadratisk matrix af orden n .

Lad u være en egentlig vektor og λ et reelt tal. Hvis der gælder, at

$Au = \lambda u$, kaldes u en egenvektor for A og tilsvarende kaldes λ en eigenverdi.

Introduktion med eksempler

Eksempel 1

Lad $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; vi vil undersøge, om der findes en eigenverdi:

$$Au = \lambda u \Leftrightarrow (A - \lambda I)u = \vec{0}$$

I den sidste ligning er nulvektoren altid en løsning, men som egenvektor skal der findes en egentlig vektor. Da ligningen skal have flere løsninger, skal determinanten være nul. Vi

beregner determinanten $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$; dette

polynomium kaldes **det karakteristiske polynomium** for A . Rødderne i polynomiet findes let som 2 og 3. For hver værdi findes den tilsvarende egenvektor:

For $\lambda=2$ fås $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er altså en egenvektor

(ligesom denne vektor multipliceret med en skalar forskellig fra nul.)

Nulrummet for $A - \lambda I$ er et underrum kaldet **egenrummet** for A (hørende til eigenverdien λ .)

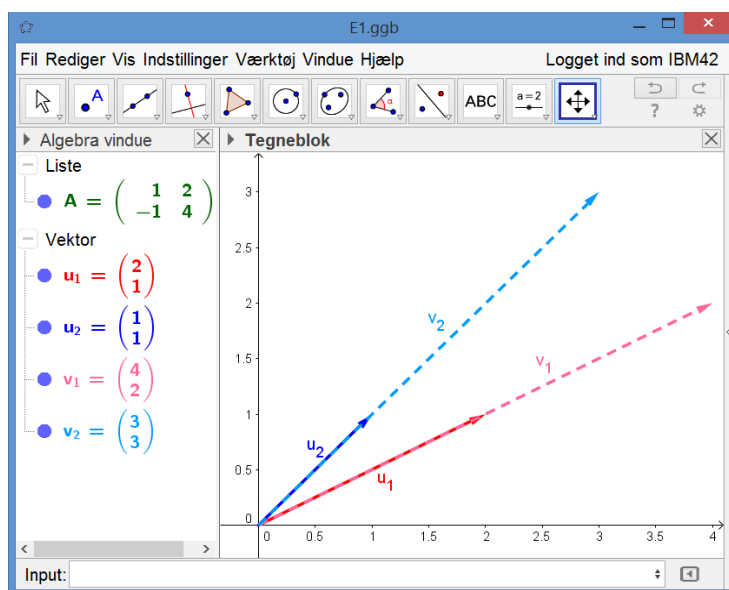
For $\lambda=3$ fås $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ og

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er altså en egenvektor

(ligesom denne vektor multipliceret med en skalar forskellig fra nul.)

Til højre ses de to egenvektorer u_i og v_i beregnet som $A \cdot u_i$.



Eksempel 2

Lad os se på matricen $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, hvor det gælder at $A\vec{u} = \hat{\vec{u}}$. hvor . (Kontroller, at produktet bliver tværvektoren.)

Det er så indlysende, at der ikke eksisterer nogen egenvektor! (Forklar hvorfor)

Men lad os alligevel opskrive det karakteristiske polynomium $k(\lambda)$:

$$k(\lambda) = \lambda^2 - (1 \cdot (-1)) = \lambda^2 + 1 \quad \text{og det er klart, at det ingen rødder har. (Hvorfor?)}$$

Egenverdier og egenvektorer eksisterer ikke i dette tilfælde.

Eksempel 3 (Koblede differentiaalligninger)

Modeller af typen der beskrives her, kan opstå, hvis man fx vil beskrive

- forureningen som en funktion af tiden i et system af forbundne søer
- koncentration af et bedøvelsesmiddel i hhv. blod og væv
- et fysisk fænomen med Newtons 2. lov $\left(\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F \text{ og } \frac{dx}{dt} = v \right)$

Som et taleksempel gennemregnes følgende:

$$\begin{aligned} y'_1 &= 4y_1 + 3y_2 \\ y'_2 &= 2y_1 + 3y_2 \end{aligned} \quad \text{som skrives som vektorfunktioner hhv. matrix: } y' = Ay$$

Funktionen $y = \vec{0}$ er uinteressant som løsning. Vi prøver at finde løsninger af typen:

$y = f(x)u$ og følgelig $y' = f'(x)u$, hvor $f(x)$ er en reel funktion (og optræder som "skalar") og u er en konstant vektor. Dvs. hvis u er en egenvektor og λ den tilsvarende egenverdi fås ved indsætning i $y' = Ay$:

$$f'(x)u = Af(x)u \Leftrightarrow f'(x)u = f(x)Au \Leftrightarrow f'(x)u = f(x)\lambda u$$

For at ligningen skal være sand, skal $f'(x) = \lambda f(x)$, hvilket er opfyldt for funktioner af typen $f(x) = c \cdot e^{\lambda x}$.

- Her er $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 3 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$
- Det karakteristiske polynomium er: $\lambda^2 - 7\lambda + 6$
- Rødderne er $\lambda = \frac{-(-7) \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$
 - $\lambda_1 = 1$
 - $A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 4 - 1 & 3 \\ 2 & 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
 - Egenvektoren $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 - $\lambda_2 = 6$

- $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-6 & 3 \\ 2 & 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
- Egenvektoren $u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
- Løsninger til ligningssystemet er vektorfunktionerne
 - $c_1 \cdot e^x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $c_2 \cdot e^{6x} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ eller linearkombinationer heraf:
 - $y = c_1 \cdot e^x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{6x} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ hvor konstanterne kan bestemmes med kendskab til en funktionsværdi for vektorfunktionen. Antag fx at for $x = 0$ er $y = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
 - Så fås ligningssystemet
 - $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \cdot e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^0 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} c$, som har løsningen $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sætninger

Potenser

Hvis A er en kvadratisk matrix, u en egenvektor for A og λ den tilsvarende egenværdi, vil u også være egenvektor for A^n med egenværdien λ^n .

Øvelse 1

Bevis sætningen.

Antal løsninger for et differentialligningssystem

Lad A være en kvadratisk matrix af orden n , hvor ligningssystemet $y' = A y$ har en løsning og egenvektorerne (u_i) udgør en basis i $\mathbb{R}^n$. Så findes der én og kun én løsning, hvor $y(0) = v$. ($v \in \mathbb{R}^n$)

Bevis

Den fuldstændige løsning til ligningssystemet er givet som $y = \sum_{i=1}^n c_i \cdot e^{\lambda_i x} u_i$. Indsættes

begyndelsesbetingelsen fås: $v = \sum_{i=1}^n c_i \cdot e^{\lambda_i 0} u_i = \sum_{i=1}^n c_i u_i = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot c$. Da matrixens søjlevektorer udgør en basis, er den invertibel og dermed kan c entydigt bestemmes.

Symmetriske matricer (Sætning 1)

Hvis egenværdierne for en symmetrisk matrix alle er forskellige, er egenvektorerne ortogonale.

Bevis

Lad λ og μ være forskellige egenverdier med tilhørende egenvektorer hhv. v og w .

Der gælder så:

$$\lambda(v \cdot w) = (\lambda v) \cdot w = (Av) \cdot w = v \cdot (A^T w) = v \cdot (Aw) = v \cdot (\mu w) = \mu(v \cdot w)$$

Hvis $v \cdot w \neq 0$ fås en modstrid: $\lambda = \mu$. Derfor gælder: $v \cdot w = 0$

Øvelse 5

Gennemgå beviset og find argumenter for alle dele af det.

Symmetriske matricer (Sætning 2)

Lad A være en symmetrisk $n \times n$ matrix. Så har det karakteristiske polynomium præcis n reelle rødder (hvor dobbeltrødder tæller dobbelt :-) og A har n reelle egenverdier.

Bevis

Beviset udnytter, at et n 'tegradspolynomium altid har n rødder; nogle eller alle kan dog være komplekse rødder. Hvis λ er en kompleks rod, kan den skrives som $\lambda_1 + i\lambda_2$, hvor λ_1 og λ_2 er reelle tal, men i er et tal med egenskaben, at $i^2 = -1$.

Der findes altså n egenverdier og λ er en vilkårlig af disse. Opgaven er blot at vise, at λ er et reelt tal, dvs. at $\lambda_2 = 0$.

Da λ er en egenverdi gælder:

$$\det(A - (\lambda_1 + i\lambda_2)I) = 0$$

Der multipliceres på begge sider med en anden determinant:

$$\det(A - (\lambda_1 + i\lambda_2)I) \cdot \det(A - (\lambda_1 - i\lambda_2)I) = 0$$

Så benyttes produktreglen for determinanter: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

$$\det((A - (\lambda_1 + i\lambda_2)I)(A - (\lambda_1 - i\lambda_2)I)) = 0$$

De to matricer (rød og blå) multipliceres, hvor der benyttes de sædvanlige regneregler for matricer inklusive matrix-varianten af den 3. kvadratsætning:

$$\det((A - \lambda_1 I)^2 - (i\lambda_2)^2 I) = 0 \Leftrightarrow \det((A - \lambda_1 I)^2 + (\lambda_2)^2 I) = 0$$

Da den grønne matrix G har determinanten 0, findes der en egentlig vektor som løsning til

$$((A - \lambda_1 I)^2 + (\lambda_2)^2 I)x = \vec{0}$$

Lad u være en sådan løsning

$$((A - \lambda_1 I)^2 + (\lambda_2)^2 I)u = \vec{0} \Leftrightarrow$$

På begge sider findes nu prikproduktet med vektor u :

$$\begin{aligned}(((A - \lambda_1 I)^2 + (\lambda_2)^2 I)u) \cdot u &= \vec{0} \cdot u \Leftrightarrow \\ ((A - \lambda_1 I)^2 u) \cdot u + (\lambda_2)^2 (u \cdot u) &= 0 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

Bemærk, at nu er det en ligning med tal! Og at multiplikation mellem matrix og vektor ikke er markeret, mens der er en prik, hvor der beregnes et prikprodukt.

$$\begin{aligned}((A - \lambda_1 I)(A - \lambda_1 I)u) \cdot u + (\lambda_2)^2 |u|^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ u \cdot (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_1 I)u + (\lambda_2)^2 |u|^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ u^T (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_1 I)u + (\lambda_2)^2 |u|^2 &= 0 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

I sidste led er udnyttet, at prikket en vektor med sig selv fås kvadratet på normen.

I første led benyttes den kommutative regel for prikproduktet og derefter som (elementet i) matrixproduktet der fås, ved at transponere den første vektor.

Da A er symmetrisk gælder det også for $A - \lambda_1 I$, som derfor er lig den transponerede:

$$\begin{aligned}u^T (A - \lambda_1 I)^T (A - \lambda_1 I)u + (\lambda_2)^2 |u|^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ ((A - \lambda_1 I)u)^T (A - \lambda_1 I)u + (\lambda_2)^2 |u|^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ ((A - \lambda_1 I)u) \cdot (A - \lambda_1 I)u + (\lambda_2)^2 |u|^2 &= 0 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

Produktet af de to transponerede omskrives (med rødt.) De to matricer (hhv. rød og blå) har et produkt (som element), der er lig med prikproduktet. Og da matricerne (vektorerne) er ens fås kvadratet på normen.

$$|(A - \lambda_1 I)u|^2 + (\lambda_2)^2 |u|^2 = 0$$

Da første led er positivt eller nul må det sidste nødvendigvis være nul. Og da u er en egentlig vektor må $\lambda_2 = 0$.

Men så er egenværdien et reelt tal.

Opgaver

Opgave 1

Idet $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ findes matricen $A - \lambda I$, det karakteristiske polynomium, egenverdierne og egenvektorerne

Opgave 2

For $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ find det karakteristiske polynomium, egenverdierne og egenvektorerne

Opgave 3

Idet $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ findes egenverdierne og egenvektorerne

Opgave 4

Find egenverdierne med egenrum for matricerne: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Opgave 5

Find egenverdierne og egenvektorerne for matricen: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Vær omhyggelig med beregning af det karakteristiske polynomium og skriv mellemregninger pænt op. Løs 3.-gradsligningen med p/q-metoden og polynomiers division.

Opgave 6

Find egenverdierne og egenvektorerne for matricen: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Opgave 7

Find alle egenvektorerne svarende til egenværdien 3 for matricen: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Find den anden egenværdi.

Opgave 8

Vis, at 7 er en egenværdi for matricen og find de øvrige egenværdier og alle

egenvektorerne for matricen: $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -4 \end{pmatrix}$

Opgave 9

Hvad er egenrummet for matricen $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ k & 7 \end{pmatrix}$ for enhver værdi af k ?

Opgave 10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Hvorfor er elementerne i en diagonalmatrix altid egenværdier?
2. Find de to egenvektorer og kald dem u_1 og u_2
3. Ved en **potens** A^k forstås matricen A benyttet k gange.
 1. Beregn $A^5 u_1$ og $A^5 u_2$
 2. Skriv vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ som en linearkombination af u_1 og u_2
 3. Beregn $A^5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

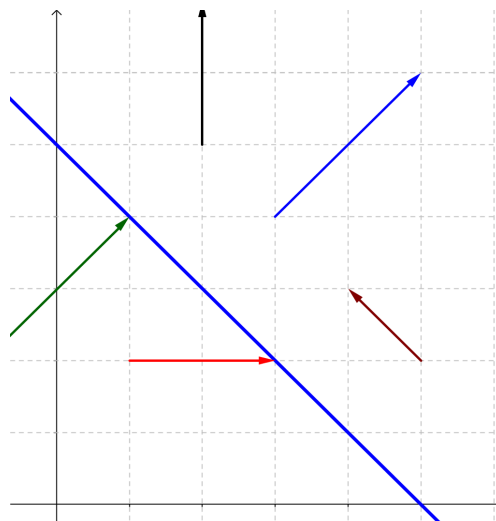
Opgave 11

1. Vis, at hvis en kvadratisk matrix har egenværdien 0, er den ikke invertibel.
2. Og omvendt: hvis den ikke er invertibel har den egenværdien 0-

Opgave 12

Lad A være matricen for projektionen af vektorer i planen vinkelret ned på den blå linje.

1. Hvilke vektorer er så egenvektorer?
2. Hvilke egenværdier fås?
3. Generaliser resultaterne



Opgave 13

Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ er egenvektor for matricen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

1. Vis det er rigtigt
2. Find den tilsvarende egenverdi
3. Hvor få beregninger er nødvendige for at besvare spørgsmål 2?

Opgave 14

Givet differentialligningssystemet

$$\begin{pmatrix} y_1' = 4y_1 + 2y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

1. Beregn egenverdier og egenvektorer
2. Find den fuldstændige løsning til ligningssystemet
3. Find den løsning, hvor $y_1(0)=5$ og $y_2(0)=-2$

Stikordsregister

adjungerede matrix.....	27	linearkombination.....	34
afbildning.....	37	Lineære transformationer.....	37
Afstanden mellem to vektorer.....	44	længden.....	44
basis	36	Løsning af ligninger med invers matrix	
billedet.....	50		19
billedmængden.....	37	løsning til en ligning.....	6
billedrummet.....	37	matricen kvadratisk.....	11
bundne variable.....	13	matricens enkelte elementer.....	11
Cauchy-Schwartz' ulighed.....	46	Matrix-beregninger.....	10
Cramers regel.....	29	modstrid i ligningssystemet.....	11
det karakteristiske polynomium.....	62	Navngivning og notation, matricer.....	11
Determinantsætningen.....	25	nedre trekantsmatrix.....	26
diagonalen.....	26	Normen.....	44
diagonalmatrix.....	26	nulmatrix.....	18
dimension.....	36	opløsning efter en række.....	25
Echelonform.....	11	opløsning efter en søjle.....	25
Echelonform, reduceret	11	Ortogonale vektorer generelt.....	45
egenrummet.....	62	partikulær løsning.....	37
egenvektorer.....	62	pivot.....	11
Egenværdier.....	62	potens (matrix).....	68
elementer, matricens enkelte	11	Projektion af vektoren v	45
elementære matricer.....	30	Projektion af vektorer.....	45
enhedsmatricer.....	18	reduceret Echelonform.....	11
frembringere.....	36	Regneregler for matricer.....	20
frie variable.....	13	singulær.....	19
fuldstændige løsning.....	37	span.....	34
Gausselimination.....	11	totalmatrix.....	10
indgange, matricens.....	11	transponerede matrix	20
invertibel.....	19	Trekantsmatrix.....	26
koefficienter.....	6	Trekantsuligheden.....	46
komplementet.....	25	ubekendte.....	6
koordinater.....	11	underdeterminanten.....	25
kvadratisk matricen.....	11	undermatrix.....	25
ligninger, ændringer af	6	underrum U	36
ligningssystem, et.....	6	ændringer af ligninger.....	6
Ligningssystemer.....	6	øvre trekantsmatrix.....	26