Funktioner

fra A til Z

Ikast 2017

Ib Michelsen

Ib Michelsen

Matematik A: Funktioner

Sidst ændret: 19-4-2017

Udskrevet:

C:\Users\IbM\Downloads\FunktionerA-Z .odt

Sidste rettelser: 25-5-2017

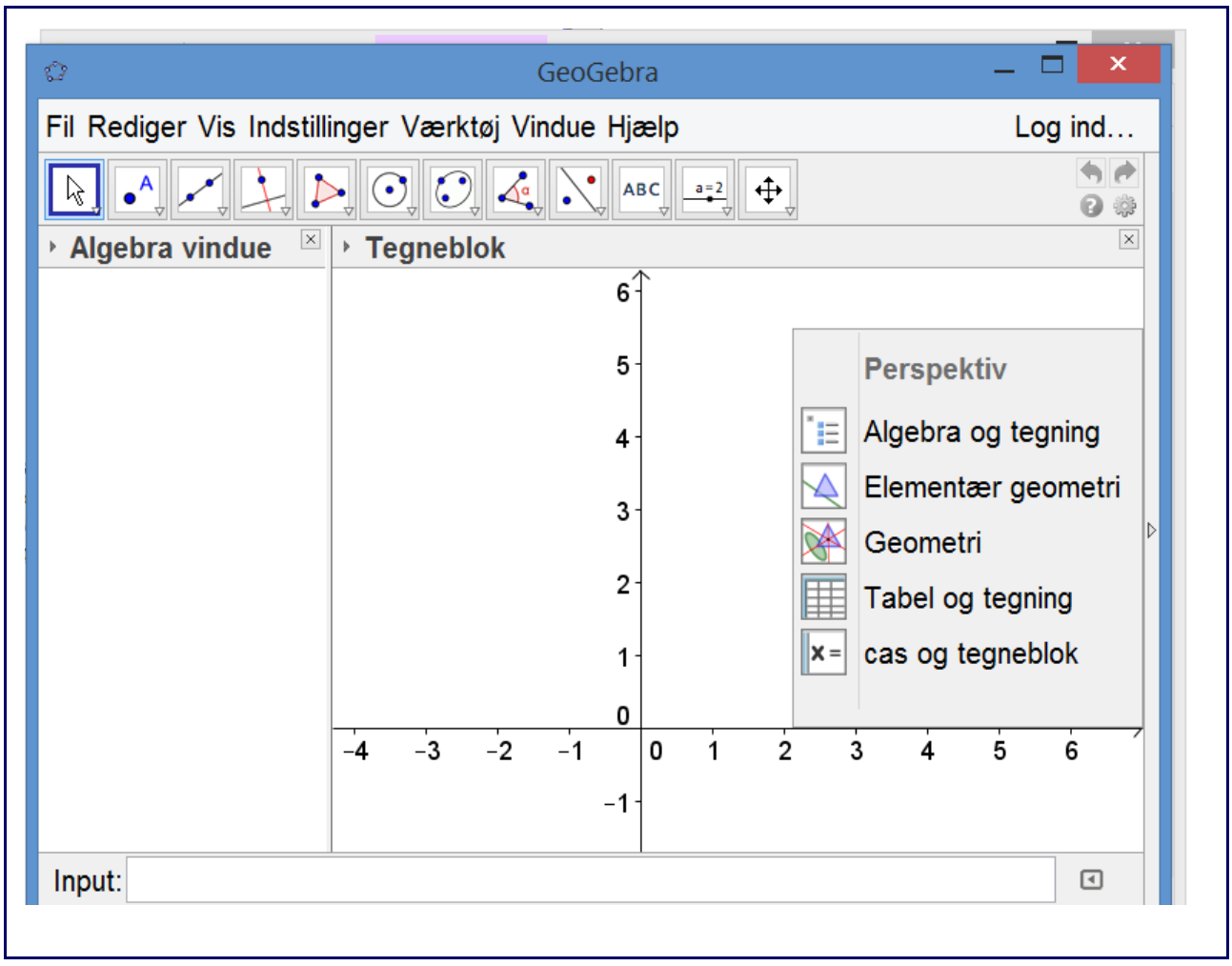
84 sider

Indholdsfortegnelse

Introduktion....5
GeoGebra....6
Om programmet....6
Koordinatsystemet....6
Eksperimenter med en lineær funktion....7
Regression....11
Funktionsværdier og ligninger....15
Funktioner....17
Definition....18
Beskrivelse af funktionen....18
Surjektion....18
Injektion....19
Bijektion....19
Monotoniforhold....19
Modeller....21
Taxaturen....21
Invers funktion....22
Kombinationer af funktioner....23
Kontinuitet....23
Weierstrass definition (epsilon-delta)....23
Overblik over funktioner, kurver, ligninger ….....25
Den lineære funktion....27
Øvelser og eksperimenter....28
Eksamensopgaver med besvarelser....31
Opstilling af en model....31
Find parametre mv....32
Regression....34
Teori: Definitioner – sætninger....35
Definitioner....35
Sætning: Forskriften for en lineær funktion....36
Den omvendte sætning....37
Hældningskoefficient og begyndelsesværdi....37
Ligefrem proportionalitet....38
Ligefrem proportionalitet mellem ændringer....38
Parameterformlerne....38
Kendetegn for en lineær funktion....40
Oversigt....40
Den eksponentielle funktion....41
Øvelser og eksperimenter....42
Eksponentiel vækst....42
Logaritmer....45
Teori: Definitioner - sætninger....48

Definition af den eksponentielle funktion....48
Parameterberegning I....48
Modeller....52
Vækstfaktor og procentvis ændring....52
Definition af fordoblingskonstant og halveringskonstant....53
Sætninger....53
Parameterberegning II....55
Eksamensopgaver med besvarelser....56
En eksponentiel model....56
Kendetegn for en eksponentiel funktion....58
Oversigt....58
Rentesregning....59
Rentetilskrivning....60
Kapitalfremskrivningsformlen....60
Annuiteter....63
Opsparingsannuitet....63
Gældsannuitet....64
Eksamensopgaver med besvarelse....65
Kapitalfremskrivning....65
Potensfunktioner....67
Grafens udseende....68
Terningen som model....69
Dobbeltlogaritmisk koordinatsystem....70
Funktionstypen....72
Biologiske modeller....72
Andre eksempler på modeller....72
Omvendt proportionalitet....73
Teori: Definitioner – sætninger....74
Definition af potensfunktion....74
Sætning om begyndelsesværdi....74
Sætning om lineær sammenhæng af logaritmerne....74
Sætning om potensfunktioners vækst....74
Parameterformlerne....75
Definition af omvendt proportionalitet....76
Eksamensopgaver med besvarelser....77
Opstilling af en model....77
Regning med vækstfaktorer....79
Parametre, ligning, vækst....79
Kendetegn for en potensfunktion....82
Oversigt....82
Stikordsregister....84

Introduktion



GeoGebra

Om programmet

Du skal bruge programmet GeoGebra, som du henter fra hjemmesiden www.GeoGebra.org.

Du bør normalt have den (eller de) nyeste udgave(r): I skrivende stund er det GeoGebra 5.0.249.0-3D (fra 13. juni 2016.) Programmet opdateres jævnligt.

Når programmet startes, ses brugerinterfacet (jævnfør billedet på foregående side):

Med mindre du vælger et andet perspektiv, vil det første: *Algebra og tegning* være standard.

Bemærk vinduets opbygning:

- Det er et standard windows-vindue, som du kan minimere, maksimere og lukke.
- Det har øverst en menulinje, der ligner mange andre programmers. Muligheden "Log ind" er unødvendig og uinteressant for den normale bruger af programmet.
- Lige under findes en billedmenulinje. Under hvert ikon i billedmenuen findes andre (beslægtede) ikoner. Det ikon, der er fremhævet med en blå ramme er det aktuelle (og valgte ikon.) På billedet er det pilen længst til venstre (kaldet *Flyt*); med den kan objekter flyttes og udpeges.
- Midt i vinduet findes to store rektangulære områder: *Algebravinduet* og *Tegneblokken* med koordinatsystemet.
- Nederst findes *Inputfeltet*.

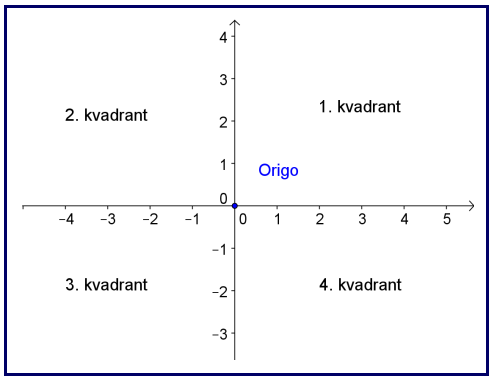
I første omgang behøver du ikke nogen manual til programmet: Alt, hvad du skal gøre, dikteres. Hvad der foregår, bør være klart. Men det er en god ide at undersøge, hvilke muligheder menuerne tilbyder. Prøv, hvad der sker, hvis …

Programmet kan næsten alt, hvad du kan forestille dig. Find forklaringer med *Hjælp* (F1). Eller ved at Google. Her er det bedst at benytte engelsk, men det er ikke altid nødvendigt.

Koordinatsystemet

Det forudsættes, at du kender det almindelige retvinklede koordinatsystem og

- navne som *x-akse*, *y-akse*, *1. akse*, *2. akse* og
- navne som *enhed* på aksen,
- *koordinater*,
- *et punkt i koordinatsystemet* og
- *punktets koordinater*,



- 1., 2., 3. og 4. *kvadrant*,
- begyndelsespunkt (*origo*)

Som navnet antyder, at findes der andre koordinatsystemer: Dem kommer vi tilbage til på et senere tidspunkt.

Rene Descartes

Descartes (1596 - 1650) er kendt som filosof, men også som ophavsmanden til det *Cartesiske koordinatsystem* (som er det, du kender) og analytisk geometri, hvormed algebra anvendes til at løse geometriske problemer. Anvendelse af x og y som betegnelse for ukendte størrelser skyldes også Descartes. Hans arbejde bliver et vigtigt skridt på vejen til *differential- og integralregningen.*

Eksperimenter med en lineær funktion

Funktioner er sammenhænge mellem *variable*. Variables *værdier* er ofte, men ikke nødvendigvis altid tal. Den ene variabel kaldes den *uafhængige variabel*. Når denne variabel antager en bestemt værdi, kan du med beskrivelsen af funktionssammenhængen finde den anden variabels (den *afhængige variabels*) værdi.

Eksempel

Jens er ungarbejder i en kolonialforretning, hvor han tjener 64 kr. i timen. Vi laver nu en model, hvor den uafhængige variabel er arbejdstiden (målt i antal ugentlige arbejdstimer) (*x-værdien*) og den afhængige variabel er ugelønnen (målt i kroner) (*y-værdien*).
Af forklaringen ses nemt, at arbejder Jens fx 10 timer om ugen, tjener han 640 kr. Som matematikere vil vi ofte beskrive sammenhængen generelt sådan:

- Arbejdstiden pr. uge måles i timer og den uafhængige variabel (x) måler længden af arbejdstiden.
- Ugelønnen måles i kroner. Den afhængige variabel (y) måler ugelønnens størrelse.
- Sammenhængen mellem de to variable beskrives så af funktionen med forskriften $y=64\cdot x$ eller $f(x)=64\cdot x$. Den sidste skrivemåde understreger, at variablen $f(x)$ afhænger af x.

x er en pladsholder, en joker, der kan erstattes af alle mulige (rimelige) tal; når det konkrete timetal så multipliceres med 64, beregnes den tilsvarende ugeløn.

Du bemærker, at sammenhængen mellem de to variable kan beskrives på forskellige måder: Verbalt, som i begyndelsen, med en *funktionsforskrift*, som vist lige før. Du kan også nemt lave en *tabel* eller tegne en *graf* i et almindeligt retvinklet koordinatsystem, der viser den samme sammenhæng.

Øvelse 1

- Åbn GeoGebra, maksimer vinduet, i menuen *Indstillinger* vælges *Font størrelse* 20 pt; i samme menu vælges *Gem indstillinger.*
- Klik i *Tegneblok* (for at vælge den), højreklik i *Tegneblok*, vælg *Gitter*. Nu skal du kunne se både koordinatsystemets akser og gitteret.
- I *Input* indtastes:
  - $a = 0.5$ (Bemærk: programmet er amerikansk/østrigsk og benytter "." i stedet for "," i decimaltal.)
  - $b = 3$
  - $f(x) = a * x + b$
- Udfyld tabellen ved aflæsning på figuren

x	-4	0	4	7
$f(x)$				

- Udfyld tabellen ved ved i Input at skrive: f_8=f(8) og tilsvarende for de øvrige felter

x	-6	0,5	3,37	8
$f(x)$				

- Udfyld tabellen ved i Input at skrive: x=-5.2 og derefter finde skæringspunktet mellem den tegnede lodrette linje og grafen. Benyt *Skæringsværktøj* i 2. billedmenu. Tilsvarende for de resterende felter.

x	-5,2	-0,3	2,4	6,7
$f(x)$				

- Udfyld tabellen ved i Input at skrive y=-3 og fortsæt på tilsvarende måde som ovenfor.

x				
$f(x)$	*-3*	*0*	*6,5*	*9,9*

- Hvad er løsningen til ligningen: $f(x)=17$?

Øvelse 2

- Åbn GeoGebra, maksimer vinduet.
- Klik i *Tegneblok* (for at vælge den), højreklik i *Tegneblok*, vælg *Gitter*. Nu skal du kunne se både koordinatsystemets akser og gitteret.
- I *Input* indtastes:
  - $a = 0.5$ (Bemærk: programmet er amerikansk/østrigsk og benytter "." i stedet for "," i decimaltal.)
  - $b = 3$
  - $f(x) = a * x + b$
- Klik på den hvide ring foran a=0.5 i algebravinduet. I Tegneblokken dannes der en *skyder*.
- Peg med musen på skyderens cirkel, hold venstre museknap nede (markøren bliver nu til en hånd, der peger med pegefingeren) og før cirklen frem og tilbage.
- Noter, hvad der sker ved forskellige værdier af *parameteren a*.
  - Svar her:

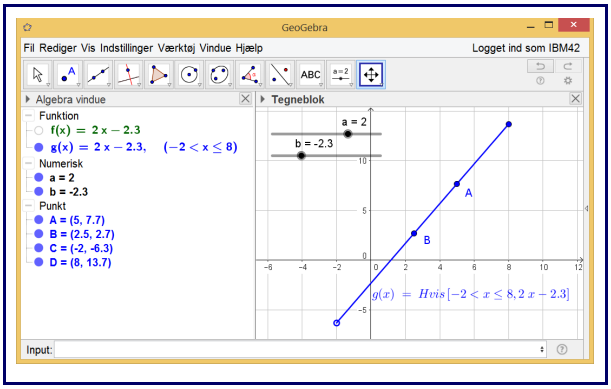
- Lav også en skyder for *parameteren b*. Noter, hvad der sker ved forskellige værdier af denne parameter.
  - Svar her:
- Indtast i Input: A=(5.0 , 7.7) og B=(2.5 , 2.7)
- Tilpas a og b med skyderne, så grafen (næsten) går gennem A og B. Hvilke værdier har parametrene så?
  - Svar her:
- Indtast: $g(x)$=Funktion[f ,-2, 8]
- Klik på "bollen" foran $f(x)$ i algebravinduet (Grafen for f vises ikke længere.)
- Indtast: (-2,f(-2)) og (8,f(8))
- Højreklik på de nye punkter; klik så på *Vis navn*(så navnene forsvinder.)

Fortsættes

Øvelse 2 fortsat

- Højreklik på grafen for *g*; vælg egenskaber.
  - I Definition ændres tegnet før "*x*" til "<".
  - I stedet for "Navn" vælges "Navn og værdi" i rullemenuen for vis navn
  - Farven på grafen ændres til blå (skift til faneblad Farve)
  - På fanen Stil ændres grafens bredde til 5
- Nu skifter du fra funktion *g* til Punkter (i samme vindue): Klik på *C*.
  - I rullemenuen for Punktmarkering vælges ringen
  - Marker nu også *D* ved at holde ctrl-tasten nede medens du klikker på *D*. Nu er både *C* og *D* markerede.
  - Forøg punktstørrelsen til 5.
  - Vælg fanen Farve; giv punkterne samme farve som *f* ved at klikke blandt farverne i *Seneste*. Luk vinduet for Egenskaber.

Nu skal din graf se ud som på figuren til højre. Punkternes form signalerer, om de er en del af grafen eller ej.



Den udfyldte ring i højre endepunkt signalerer, at x- og y-værdien i punktet er en del af sammenhængen. Punktet er en del af grafen.

Modsat i venstre endepunkt: x- og y-værdien er ikke en del af sammenhængen eller sagt på en anden måde: For denne x-værdi er funktionen *g* ikke defineret.

De x-værdier, for hvilke funktionen er defineret, kaldes *definitionsmængden* forkortet DM. Her er DM =] -2 ; 8].

- Marker dette interval på tegningens x-akse (*1. aksen*, *abscisseaksen*.)

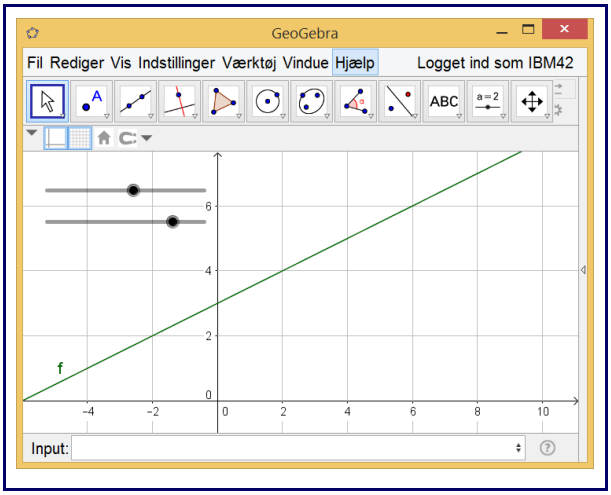
Tilsvarende kaldes alle de y-værdier, funktionen antager for *værdimængden* forkortet VM.

- Hvad er VM for funktionen *g*?
  - Svar:
- Marker VM på y-aksen (*2.-aksen*, *ordinataksen*.)

Øvelse 3

- Åbn GeoGebra, maksimer vinduet.
- Klik i *Tegneblok* (for at vælge den), højreklik i *Tegneblok*, vælg *Gitter*. Nu skal du kunne se både koordinatsystemets akser og gitteret.
- I *Input* indtastes:
  - $a = 0.5$
  - $b = 3$
  - $f(x) = a * x + b$
- Dan skydere for de to parametre
- Højreklik på skyderne, klik på vis navn; nu vises navnet ikke ved skyderne!
- Fjern algebravinduet (fx ved at klikke på lukke-krydset i øverste højre hjørne.)

Nu skal dit vindue ligne figuren til højre



- Vælg nye parametre med skyderne
- Opgaven for dig og din sidemand er at beregne de nye værdier af parametrene
  - Beregninger kontrolleres ved at se i algebravinduet. (Benyt menuen *Vis* eller ctrl+shift+a.)
- Denne del gentages indtil I er sikre på at kunne finde parametrene ret nøjagtigt ved hjælp af tegningen.

Regression

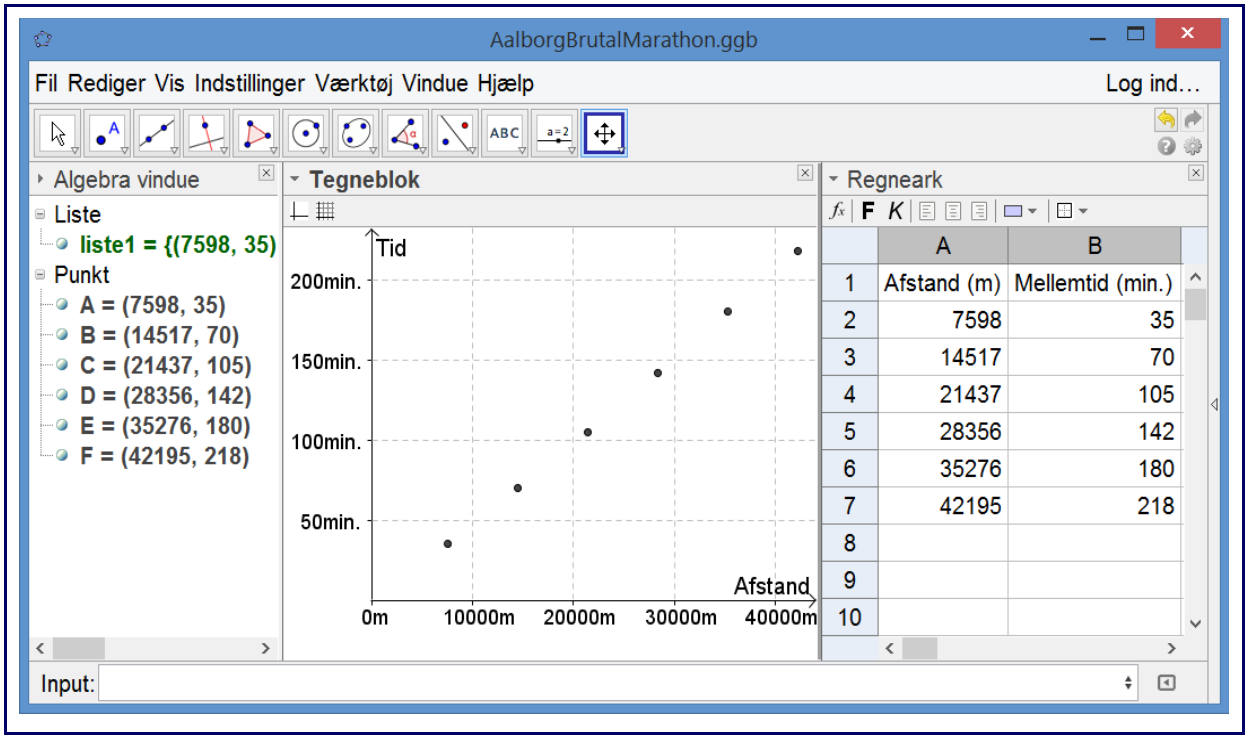
Regression er en teknik til at finde en model, der mere eller mindre godt kan beskrive sammenhængen mellem fx to variable. Hvis der benyttes data fra den virkelig verden, vil man normalt ikke få en model, der fuldstændigt kan forklare variationen i den afhængige variabel.

Eksempel: Aalborg Brutal Marathon 2004

Langfredag d. 9. april 2004 afholdtes Aalborg Brutal Marathon. Herunder er vist mellemtider og sluttid (indtastet i GeoGebras regneark) for den bedste kvinde (Helle Møland Mortensen). Vi vil undersøge, hvorledes hun har løbet. De 6 talpar markeres med musen, genvejsmenuen vælges med højreklik, vælg punktet *Lav*, vælg *Liste af punkter* og

du ser det samme som på figuren herunder:
Bemærk, at Tegneblokkens udseende er tilpasset via Egenskaber: Kun 1. kvadrant vises (hvorfor?), variabelnavne er tilføjet ved akserne og måleenheder er tilføjet.
Med øjemål kan det ses, at punkterne ligger næsten perfekt på en ret linje, med en gennemsigtig lineal kan indtrykket bekræftes. Funktionsforskriften for sammenhængen findes med en teknik, der kaldes *lineær regression*.

I Input skrives: f(x)=Fit[liste1,a*x+b]. (Du kan som før fjerne skyderne, hvis du ønsker det.)



Som resultat af beregningerne kan vi nu beskrive Helles løb med en lineær model, som tilnærmelsesvis beskriver, hvordan hun faktisk løb:

Model

x er afstanden, Helle har løbet, målt i meter, $f(x)$ er det hertil svarende tidsforbrug målt i minutter og sammenhængen beskrives med funktionsforskriften $f(x)=0{,}00529 \cdot x-6{,}79$.

Fårekyllingens sang

Øvelse 4

George W. Pierce målte i 1948 frekvensen af fårekyllingers pippen ved forskellige temperaturer. Da fårekyllinger er ectotherme, er det forventeligt, at deres fysiologiske processer er afhængige af temperaturen. Data er gengivet i tabellen herunder.

Pip/sekund	**20,0**	**16,0**	**19,8**	**18,4**	**17,1**	**15,5**	**14,7**	**15,7**	**15,4**	**16,3**	**15,0**	**17,2**	**16,0**	**17,0**	**14,4**
Temperatur °F	*88,6*	*71,6*	*93,3*	*84,3*	*80,6*	*75,2*	*69,7*	*71,6*	*69,4*	*83,3*	*79,6*	*82,6*	*80,6*	*83,5*	*76,3*

- Bestem en lineær model med regression i værktøjet GeoGebra.
- Overvej hvor vidt modellen er en god model
- Overvej i hvilket interval på 1. aksen det er rimeligt at anvende funktionen
- Hvis du hørte fårekyllinger pippe med en frekvens på 15, hvilken temperatur ville du så forvente ifølge modellen?
- Hvis temperaturen faldt til 32°F - hvilken frekvens ville du så forvente?

Tegn graf og skriv konklusioner herunder:

[1]

1 *Kilde: http://mathbits.com/MathBits/TISection/Statistics2/linearREAL.htm* (25-07-14)

Øvelse 5

- Indtast forskriften for funktionen f i GeoGebra; $f(x)=-2\cdot x+3$
- Beregn funktionsværdierne:
  - $f_{-2}=f(-2)$
  - $f_0=f(0)$
  - $f_1=f(1)$
  - $f_3=f(3)$
  - $f_4=f(4)$

idet fx f_4 skrives som f_4; f_{-2} skrives som f_{-2}.

- Svarene skrives i tabellen herunder:

x	-2	0	1	3	4
$f(x)$					

- Løs ligningerne
  - $f(x)=-4$
  - $f(x)=2$
  - $f(x)=0$
  - $f(x)=-5$
  - $f(x)=-9$
- Svarene skrives i tabellen herunder:

x					
$f(x)$	*-4*	*2*	*0*	*-5*	*-9*

Funktionsværdier og ligninger

En ligning, som $f(x)=4$, hvor $f(x)=-2\cdot x+3$, kan løses sådan:

$$\begin{aligned} f(x)&=4 \Leftrightarrow \\ -2\cdot x+3&=4 \Leftrightarrow \\ -2\cdot x+3-3&=4-3 \Leftrightarrow \\ -2\cdot x&=1 \Leftrightarrow \\ \frac{-2\cdot x}{-2}&=\frac{1}{-2} \Leftrightarrow \\ x&=-0{,}5 \end{aligned}$$

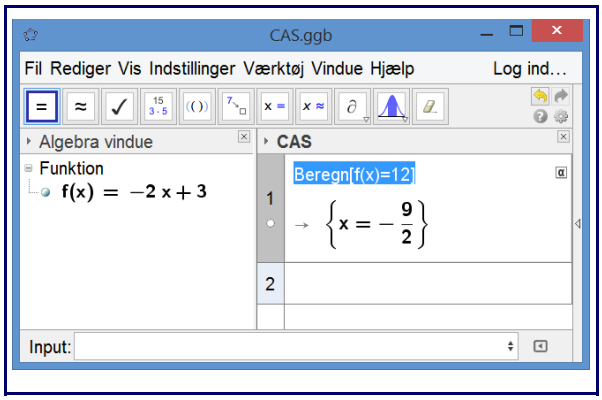
L = {-0,5}

Eksempel

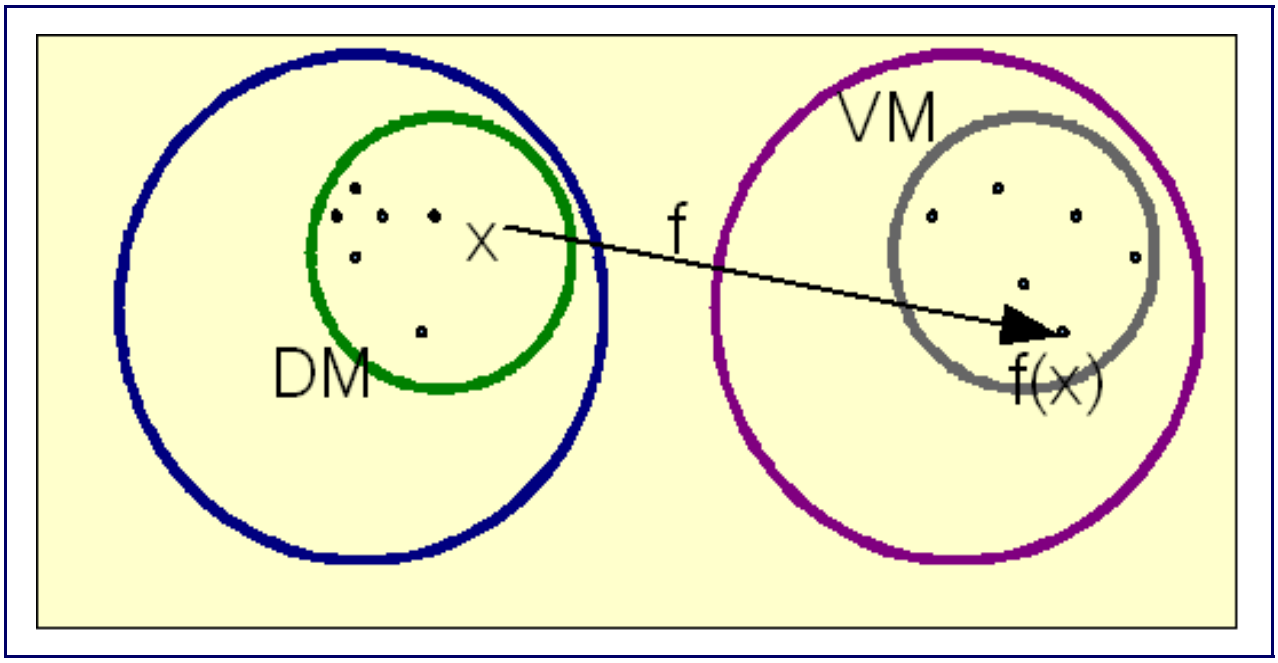
Ligninger kan også løses med CAS (i GeoGebra):

Givet funktionen fra øvelse 5:
$f(x)=-2\cdot x+3$ kan vi løse ligningen:
$f(x)=12$ ved at indtaste funktionsforskriften i inputfeltet, vælge Vis, vælge CAS og der skrive: Beregn[f(x)=12] [enter]

Som det ses i figuren til højre er løsningen -9/2 eller - 4,5.



Funktioner



Definition

En funktion ***f*** er en sammenhæng mellem variable, hvor der: for hver værdi af den ene (uafhængige) variable findes præcist én tilsvarende værdi af den anden (afhængige) variable kaldet funktionsværdien.

Kommentar

Det er vist symbolsk på tegningen (forrige side): fra værdien x (der står for en vilkårlig værdi for den uafhængige variabel: x) er der tegnet en pil over til den tilsvarende værdi for den afhængige variabel: $f(x)$.

Definitionsmængde og Værdimængde

DM (*definitionsmængden*) er mængden af alle værdier, den uafhængige variabel kan antage og hvortil der svarer en funktionsværdi.[2]

VM (*værdimængden*) er mængden af alle mulige funktionsværdier.[3]

Beskrivelse af funktionen

f er sammenhængen mellem variable. Denne sammenhæng kan være beskrevet på forskellige måder: med ord i almindeligt sprog (verbalt), med pile som ovenover, men oftere med en tabel, en graf eller en regneforskrift.

$f(x)$ kaldes funktionsværdien for x, men x er en ikke specificeret værdi fra DM – x er en slags joker, der skal erstattes af en værdi fra DM. Når x erstattes med en bestemt værdi som for eksempel 8, kan man finde $f(8)$ ved at benytte funktionsbeskrivelsen: gå det rigtige sted ind i den rigtige tabel, aflæse den til 8 svarende værdi på grafen, erstatte x med 8 i regneforskriften osv. afhængig af den måde, funktionen er beskrevet på.

Funktionens navn kan være f eller g eller *skat*, *moms*, *vægt* osv.

Surjektion

Hvis f er en funktion defineret for x-værdier i mængden A ($x \in A$) og funktionsværdierne $f(x)$ tilhører mængden B ($f(x) \in B$) og der gælder, at VM(f)=B, så kaldes f en *surjektion* (på B).

Eksempel

Lad $f(x)=x+3\,;\, DM(f)=R$ Så er $VM(f)$ =R og f er en surjektion på R. (Begrund!)

2 På tegningen er det elementer i den grønne "mængdebolle". For elementer i den blå mængdebolle udenfor den grønne er der ikke angivet en funktionsværdi.

3 På tegningen er det alle elementerne i den grå mængdebolle.

Injektion

Hvis f er en funktion defineret for x-værdier i mængden A ($x \in A$) og funktionsværdierne $f(x)$ tilhører mængden B ($f(x) \in B$) og der gælder, at

hvis to x-værdier er forskellige, vil de tilsvarende funktionsværdier også være forskellige, så kaldes f en *injektion*. ($\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)

Overvej, at betingelsen også kan formuleres: $\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Opgave

Overvej at funktionen $f(x) = x + 3 \,;\, DM(f) = R$ også er en injektion!

Bijektion

Hvis f er en funktion, der både er en surjektion og en injektion, kaldes den en *bijektion*.

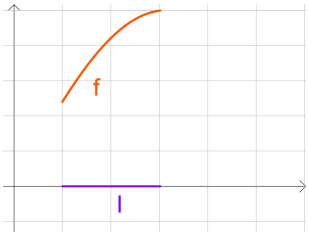
Opgave

Er $f(x) = x + 3 \,;\, DM(f) = R$ en bijektion?

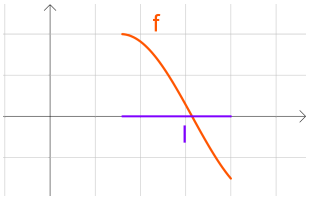
Monotoniforhold

Lad f være en funktion, hvor både DM og VM er de reelle tal eller evt. en delmængde heraf.

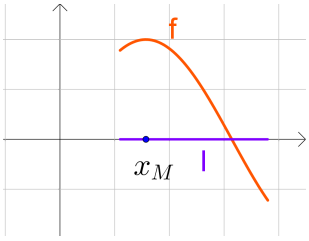
f siges at være *voksende* i et interval I, hvis
$\forall x_1, x_2 \in I \subset DM(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



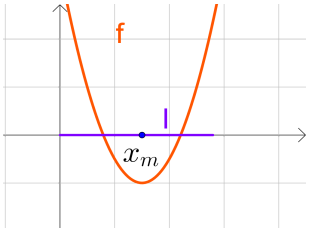
f siges at være *aftagende* i et interval I, hvis
$\forall x_1, x_2 \in I \subset DM(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



f siges at at have et *lokalt maksimum* $f(x_M)$ i x_M , hvis der findes et åbent interval I , $x_M \in I$: $\forall x \in I : f(x_M) > f(x)$



f siges at at have et *lokalt minimum* $f(x_m)$ i x_m , hvis der findes et åbent interval I , $x_m \in I$: $\forall x \in I : f(x_m) < f(x)$



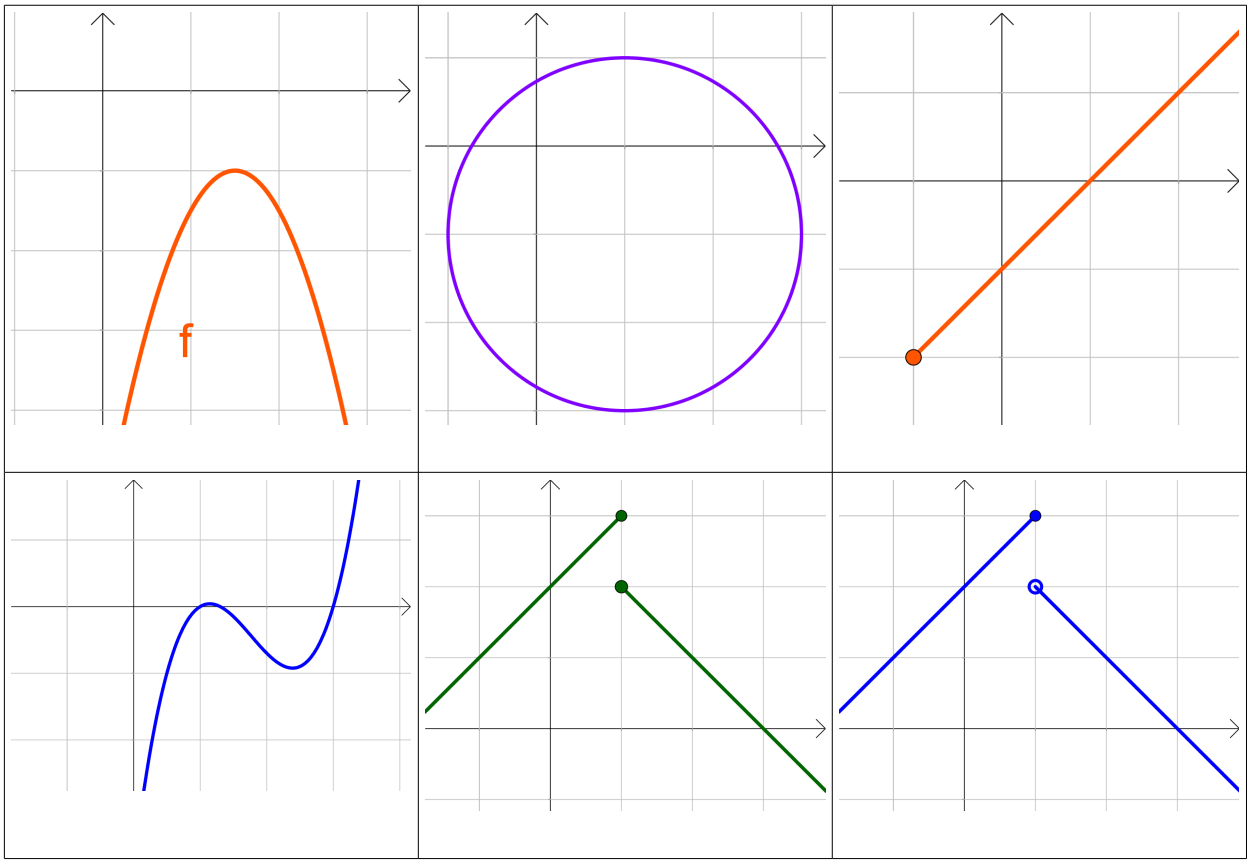
f siges at have en størsteværdi eller et *globalt maksimum* $f(x_S)$ i x_S , hvis
$\forall x \in DM(f) : f(x_S) > f(x)$

f siges at have en mindsteværdi eller et *globalt minimum* $f(x_t)$ i x_t , hvis
$\forall x \in DM(f) : f(x_t) < f(x)$

En funktion siges at være *monoton*, hvis den enten er voksende eller aftagende i hele DM.

Øvelse 6

Undersøg figurerne herunder: Er det grafer for en funktion? Og hvis det er tilfældet: hvorledes kan funktionen så beskrives med de lige definerede begreber?



Modeller

Taxaturen

Et taxaselskab beregner priser for taxature nogenlunde sådan:

Der betales et startgebyr på 30 kroner og desuden ca. 10 kroner pr. km. Dette er en forenklet beskrivelse - som alle modeller er - fordi der ikke er taget hensyn til andre faktorer som tidsforbrug, særlige tjenester mv.

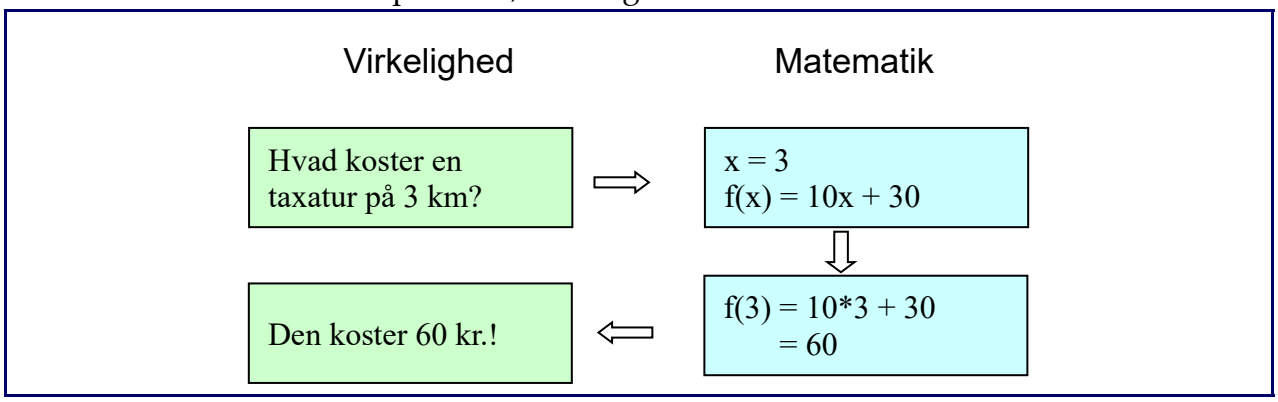
Vi opstiller nu modellen:

x er turens længde (målt i km) og $f(x)$ er tilsvarende taxaturens pris (målt i kroner). Funktionsforskriften er

$$f(x)=10\cdot x+30, x\in R_0$$

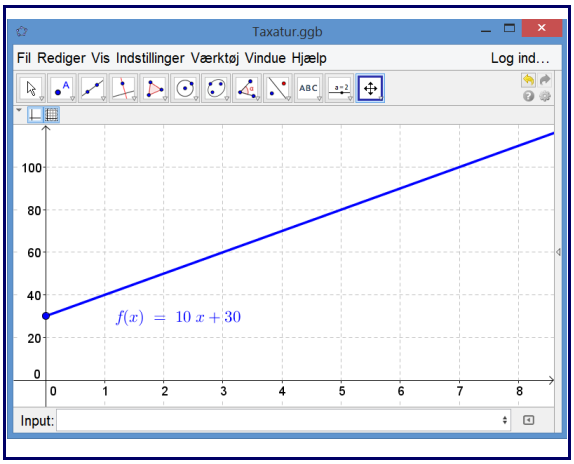
Nu kan prisen for en tur på 3 km beregnes som $f(3)=10\cdot 3+30=60$; turen koster altså 60 kr.

Herunder vises forenklet en modelleringsproces: Det virkelige problem formuleres, omformes til et matematisk problem, løses og svaret oversættes .



Øvelse 7

- Forklar: På hvilke forskellige måder kan du finde priserne på taxature? (Vis med eksempler hvordan)
- Forklar: Hvor langt kan du komme for 85 kr.? Vis mindst 2 forskellige løsningsmetoder.
- Et konkurrerende firma (Lillebilen) har et startgebyr på 20 kr. og en km-takst på 15 kr. Hvornår kan det betale sig at køre med det firma alt andet lige?



Invers funktion

Lad os finde "den omvendte taxafunktion" $g(x)$: Her er x beløbet, jeg har til taxaturen og $g(x)$ den afstand, jeg kan køre for x kroner. Ved at indsætte i funktionsforskriften for f fås:

$$\begin{aligned} x &= 10 \cdot g(x) + 30 \Leftrightarrow \\ x - 30 &= 10 \cdot g(x) + 30 - 30 \Leftrightarrow \\ x - 30 &= 10 \cdot g(x) \Leftrightarrow \\ \frac{x-30}{10} &= \frac{10 \cdot g(x)}{10} \Leftrightarrow \\ \frac{x}{10} - 3 &= g(x) \Leftrightarrow \\ g(x) &= 0{,}1 \cdot x - 3 \end{aligned}$$

Overvej: Beregner man først med f, hvad en tur med længden x_0 koster og derefter beregner $g(f(x_0))$ fås x_0 ! Kontroller det.

Hvad er så $f(g(x_1))$?

g kaldes den *omvendte funktion* eller den *inverse* funktion til f. Den betegnes oftest f^{-1} i stedet for g.

Øvelse 8

- Angiv DM og VM for f og f^{-1}, idet vi antager, at ingen taxatur er længere end 300 km.
- Tegn grafen for begge funktioner med GeoGebra. Tjek, at grafen er i overensstemmelse med det forrige punkt.
- Kan du se et mønster (når du zoomer ud, så du kan se begge grafer i deres helhed)?

Kombinationer af funktioner

Antag, at vi har en række funktioner: *f*, *g*, *h* … fra de reelle tal til de reelle tal. Med disse kan vi konstruere nye funktioner *n* som

$n=(f+g)$ forstået som $n(x)=f(x)+g(x), x\in DM(f)\cap DM(g)$, dvs. $n(x)$ beregnes kun, hvis både $f(x)$ og $g(x)$ er defineret.

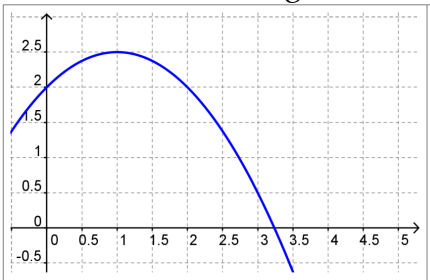
Fuldstændig tilsvarende dannes funktionerne $(f-g)$, $(f\cdot g)$ og (f/g) ; for den sidste gælder dog, at DM(f/g) ikke omfatter de x-værdier, hvor $g(x)=0$.

Øvelse 9

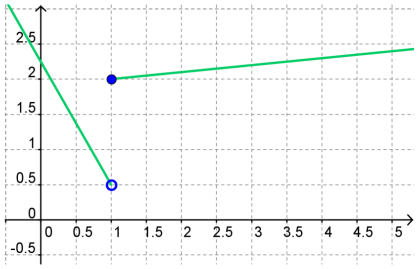
- $f(x)=1/x$, $g(x)=1/(x-1)$ og $h(x)=x$. Find funktionerne $(f+g)$, $(f-g)$, $(g-f)$, $(f\cdot h)$, (h/g) idet der for hver af de nye funktioner findes et enkelt udtryk for funktionsforskriften og definitionsmængden anføres.

Kontinuitet

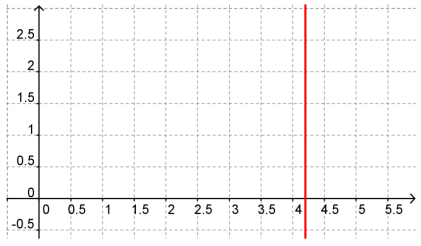
En kontinuert funktion er én, hvor grafen fortsætter (du kender "continue" fra engelsk) eller er sammenhængende. Herunder ses 3 figurer forestillende



Graf for en kontinuert funktion



Graf for funktion, der ikke er kontinuert for x=1



Ikke en graf for en funktion

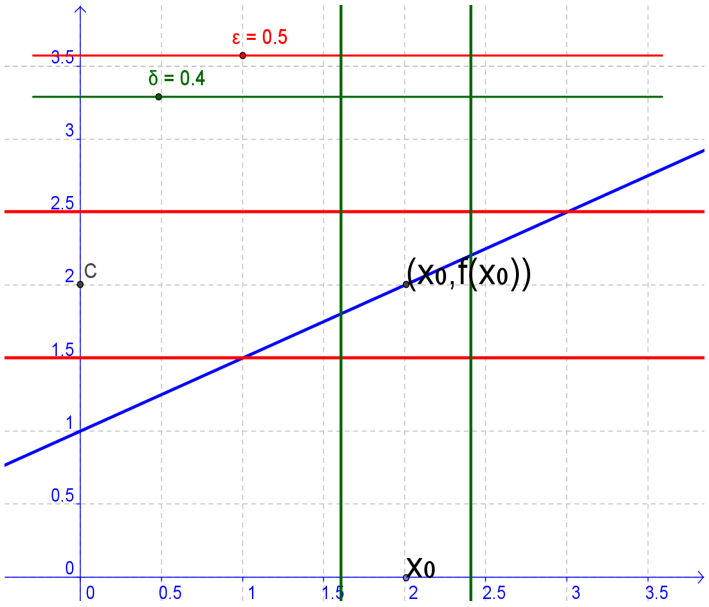
Weierstrass definition (epsilon-delta)

Kontinuitet i punkt

Lad *f* være defineret i et interval *I* omkring x_0 . Så siges f at være kontinuert i x_0 , hvis

$$\forall\epsilon\exists\delta:\forall x\in I:|x-x_0|<\delta\Rightarrow$$
$$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$$

Dette udsagn læses: Lige meget hvor snævert et interval (bestemt af epsilon) der lægges rundt om $f(x_0)$ kan vi finde et interval rundt om x_0 , hvor alle funktionsværdierne ligger i det valgte snævre interval. Dette illustreres



af figuren til højre (hvor det vises, at den blå graf hænger sammen ved x_0 .)
Tegningen viser, at epsilon er 0,5, så der skal findes et interval på 1. aksen rundt om x_0 , hvor funktionens y-værdier højst afviger med 0,5 fra $f(x_0)=2$. Det vil sige, at funktionsværdierne skal være mellem 1,5 og 2,5 (som angivet af de vandrette røde linjer.)
En løsning er markeret af de grønne linjer; vælges x mellem disse er kravet opfyldt.

Se også GeoGebra-filen: http://mimimi.dk/Mixi/nb/21/epsilonDelta.ggb

Øvelse 10

- $f(x)=3x$
- Vis, at funktionen er kontinuert for x = 2. Det gøres ved at vise, at der kan beregnes et delta for enhver epsilonværdi.
- Du skal lave beregningen for ε lig med hhv. 1, 1/10, 1/100 og endelig en vilkårlig værdi.

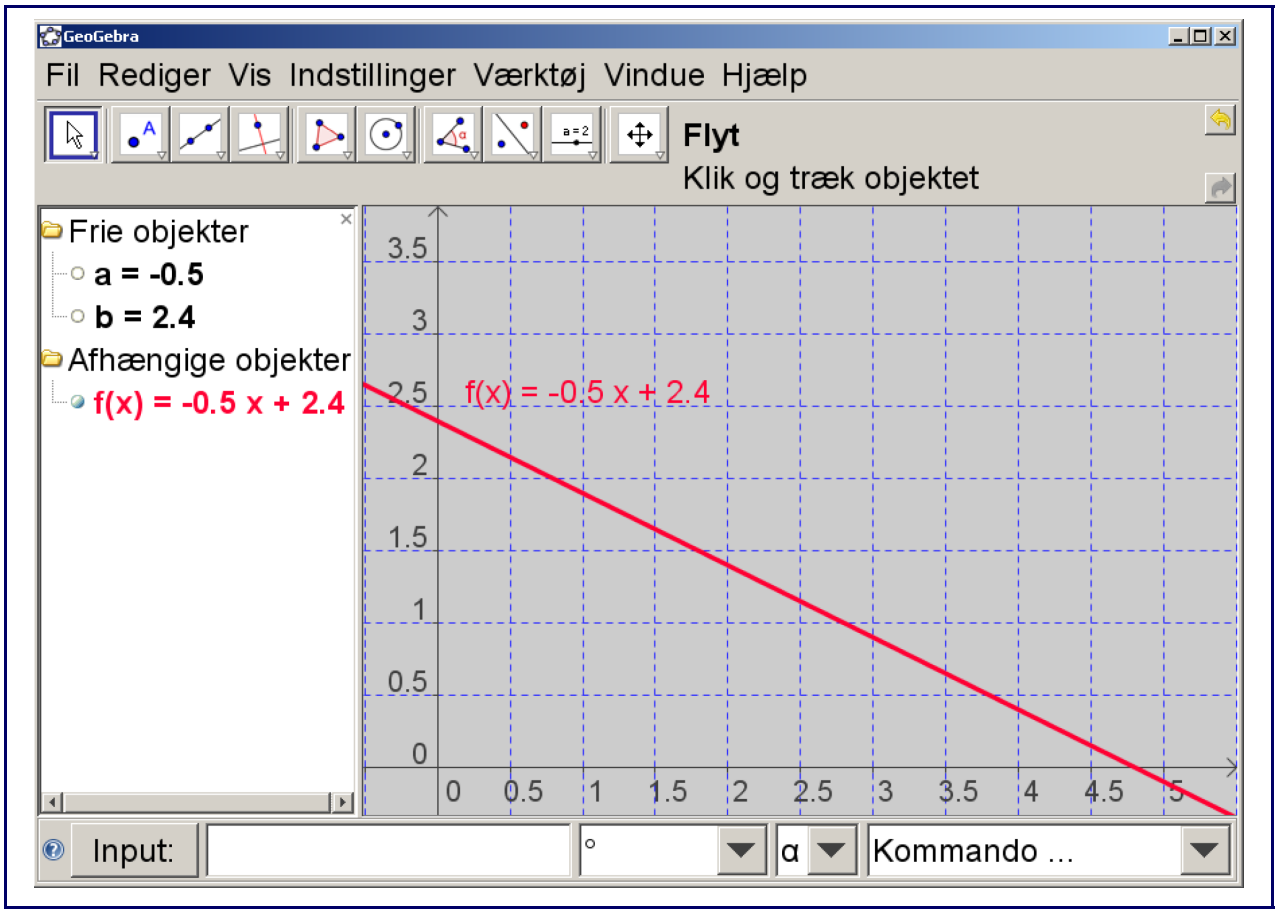
Overblik over funktioner, kurver, ligninger …

Vi benytter det almindelige retvinklede koordinatsystem til at tegne mange slags linjer og kurver, og det er ikke altid muligt umiddelbart at se, om der er tale om en graf, eller hvad der er tale om. Her er en oversigt, der skal gøre det lidt nemmere:

- Funktion og graf
  - En graf er det grafiske billede af funktionen
  - Grafen består af alle punkter i koordinatsystemet af typen $(x\,;f(x))$, hvor
    - x er en værdi i DM (= definitionsmængden) og
    - $f(x)$ er den tilsvarende y-værdi i VM (= værdimængden)
  - For én bestemt x-værdi findes der kun én y-værdi, som her skrives $f(x)$; dvs. en graf har aldrig to punkter lodret over hinanden
  - En graf er ikke nødvendigvis sammenhængende (kontinuert)
- Linjers, cirklers med fleres *ligninger*
  - En ligning er som bekendt et åbent udsagn med et lighedstegn:
    - $y = 3x - 4$
    - $x = 3$
    - $y^2 = x$
    - $x^2 + y^2 = 3^2$
  - Der indgår oftest både x og y i ligningerne, men ikke nødvendigvis
  - For hvert punkt i planen undersøger man om ligningen bliver sand, når punktets koordinater indsættes i ligningen: hvis sand, markeres punktet.
  - Mængden af alle markerede punkter udgør sommetider en genkendelig figur: er figuren en ret linje, har vi benyttet ligningen for den rette linje, er figuren en cirkel, taler vi om cirklens ligning.
  - Omvendt kan man også starte med at tegne en figur – og derefter forsøge at finde en ligning, der er sand, hvis man indsætter x- og y-værdier fra punkter på figuren. Den fundne ligning er figurens ligning.
  - Nogle figurer kunne evt. opfattes som grafer – men ikke alle.

- *Regressionslinjer / Tendenslinjer*
  - Når vi indsamler data (= talpar) fra den fysiske verden, vil vi ofte opleve, at sammenhængen kan beskrives med en enkel funktionssammenhæng. Men:
    - fejl, usikkerhed, unøjagtighed og tilfældigheder kan medføre,
      - at der til samme x-værdi svarer forskellige y-værdier og / eller
      - de nøjagtige y-værdier afviger lidt fra den enkle fremstilling.
  - Hvis sammenhængen trods alt er tydelig, vil vi sige, at vi har fundet en tilnærmet sammenhæng.
  - Sådanne data kan beskrives med regressionslinjer (tendenslinjer), som er grafer for den funktion, sammenhængen tilnærmet kan beskrives med.
- *Parameterfremstilling* af kurver
  - Hvis vi - som et typisk eksempel – vil beskrive en rejserute på et kort, kan vi arbejde med en model som:
    - t = tid (målt i sekunder eller år eller? fra et eller andet begyndelsestidspunkt som for eksempel rejsens starttidspunkt.)
    - $x(t)$ = en værdi for, hvor langt man er kommet mod øst (eller vest) til tiden t (for eksempel målt i m eller km) og tilsvarende
    - $y(t)$ = en værdi for, hvor langt man er kommet mod nord (eller syd) til tiden t.
  - Hvis der afsættes punkter for enhver t-værdi fås en kurve.
  - Kurven er en figur, der viser (noget) om funktionen, hvor DM er tiden og VM er positionerne på rejsen.
    - DM er en delinterval af de reelle tal og
    - VM er en delmængde af planen

Den lineære funktion



Øvelser og eksperimenter

Vingummibamser [4]

Øvelse 11

Øvelse for par: En fabrikant og en journalist

- Fabrikanten bestemmer (hemmeligt) to priser: en pris for én vingummibamse og en pris for en tom pose.
- Når de er bestemt går journalisten i gang med at spørge: hvad koster en pose med n vingummibamser? hvor $n > 5$. Fabrikanten svarer og journalisten må spørge igen, indtil han kan beregne de to oprindelige priser valgt af fabrikanten.
- Når det sker, byttes roller.

Øltabel

Øvelse 12

Ved en elevfest hænger der over baren et skilt, der viser sammenhængen mellem antallet af øl der købes og prisen for disse:

Antal (stk.)	1	2	3	4	5
Pris (kr.)	*18*	*36*	*54*	*72*	*90*

- Beskriv præcist, hvorledes denne information kan vises i et almindeligt retvinklet koordinatsystem – og lav tegningen.
- Hvad har du skrevet på akserne? hvorfor?
- Hvad koster 6 øller? hvorfor?
  - Angiv 2 forskellige måder at finde prisen på (ved beregning)
  - Find en tredje måde at finde prisen på!
- Eksemplet her har kun fokuseret på sammenhæng mellem antal øl og prisen for disse. Lav en liste over alternative variable, der kan benyttes i stedet for prisen. (Hvilke andre størrelser kan findes eller beregnes svarende til et antal øl?)

4 Kilde: *Eksperimentel Matematik*, Matematiklærerforeningen 2007. Idé: Peter Trautner Brander

Vækst

Øvelse 13

Benyt GeoGebras Tegneblok

- Placer et punkt *A* et vilkårligt sted i planen.
- Vælg to tal: *a* og *b*, ikke alt for store.
- Find et nyt punkt *B* = (x(*A*) + *a* , y(*A*(+*b*)
- Find igen et nyt punkt *C* på samme måde, hvor *C* og *B* erstatter *B* og *A*.
- Fortsæt på tilsvarende måde en 3-4 gange mere
- Hvad kan der siges om de tegnede punkter?
- Hvad kan du regne ud med viden om koordinaterne til *A* og de to tal *a* og *b*?

Sildeben

Øvelse 14

Et "sildeben" er en enkel tabel, der viser samhørende værdier af *x* og *y*. Antag *f* er en lineær funktion. Så gælder der den regel, at hver gang x-værdien bliver én større, vokser y-værdien altid med det samme tal.

- Udfyld den nedenstående tabel:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y						*18*	*21*				

- Udfyld den nedenstående tabel:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y						*21*	*18*				

- Udfyld den nedenstående tabel:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y						*18*		*21*			

Aflæsning på graf

Herunder ses et almindeligt retvinklet koordinatsystem (også kaldet kartesisk til ære for den berømte franske matematiker og filosof Rene Descartes (1595 – 1650)). På tegningen ses en graf og den tilsvarende funktionsforskrift (hvor der er benyttes decimalpunktum i

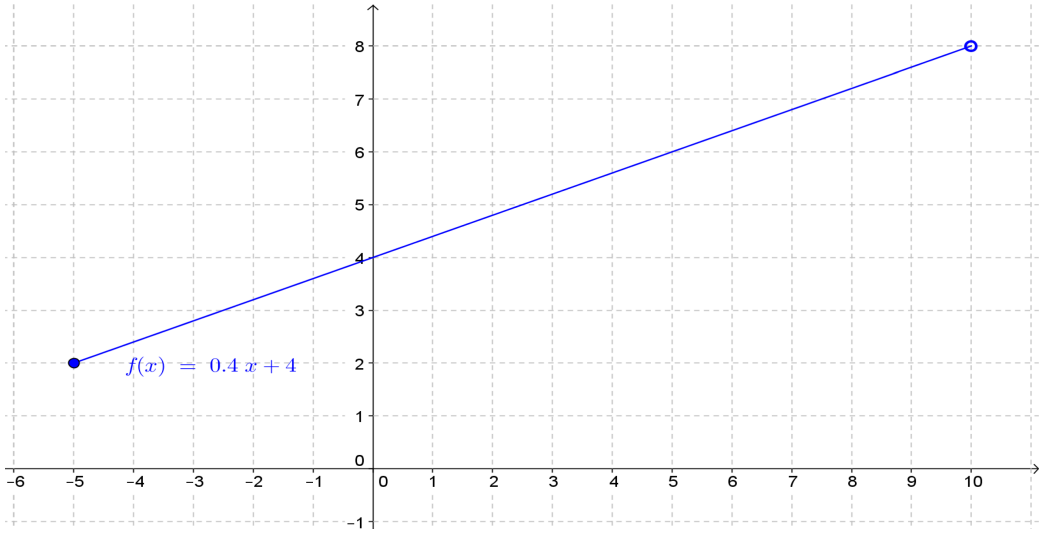
stedet for det sædvanlige komma): $f(x)=0{,}4\cdot x+4\,,\ -5\le x<10$

Det betyder, at man kan finde samhørende x- og y-værdier ved først at vælge tal for x, så dobbeltuligheden er sand. Den tilsvarende y-værdi findes så ved at multiplicere (gange) tallet med 0,4 og derefter at addere (lægge til) 4 til produktet.

For eksempel: Vælg: $x = 5$

y-værdien beregnes: $f(5)=0{,}4\cdot 5+4=2+4=6$

Bemærk, at $(x,y) = (5,6)$ er et punkt på grafen. Grafen er den blå tegning i koordinatsystemet, som består af alle punkter på den rette linje **mellem** endepunkterne **og** det ene endepunkt. Hvis et endepunkt skal medregnes, markeres det ved at tegne en udfyldt lille cirkel. Hvis det ikke er en del af grafen, tegnes det som en ring. Punktet (10,8) kan ikke være en del af grafen, da x-værdien 10 ikke overholder betingelsen x < 10.



Øvelse 15

- Udfyld den nedenstående tabel ved hjælp af aflæsning på grafen.
  - For tydeligt at markere, hvorledes du har aflæst et tal, kan du (for nogle eksempler) tegne to pile: Først vinkelret på den ene akse til grafen og dernæst vinkelret på den anden akse fra graf til akse. Skriv talværdierne, hvor første pil starter og anden slutter.

x	4	7	0	-2			
y					5	4	2,5
Kontrol							

- Kontroller aflæsningen ved beregning. Accepter en lille aflæsningsfejl op til 0,2.

Eksamensopgaver med besvarelser

Opstilling af en model

Antallet af medlemmer i Dansk Tennisforbund er siden 1999 med god tilnærmelse faldet med 2100 om året. I 1999 var medlemstallet 77.688.

a) Benyt disse oplysninger til at opstille en lineær model, der beskriver udviklingen i medlemstallet i årene efter 1999.

Kilde: Eksamensopgave 3, 2HF063-MAC

Besvarelsen

Af opgaven fremgår, at medlemstallet siden 1999 er faldet med ca. 2100 medlemmer om året, og at der i 1999 var 77.668 medlemmer.

I opgaven ønskes opstillet en lineær model. Kaldes funktionsforskriften $f(x)$, er forskriften af typen:

$f(x)=ax+b$

Da det er udviklingen efter 1999, der skal beskrives, regnes tiden som år efter 1999. Begyndelsesværdien b er så medlemstallet i 1999. Hældningskoefficienten a fortæller om den (konstante) årlige ændring i medlemstallet, her -2100 Tallet er negativt, da medlemstallet falder.

Modellen

x er tiden målt i antal år efter startåret 1999

$f(x)$ er medlemstallet x år efter 1999

$f(x) = -2100 \cdot x + 77688$

Kommentarer til besvarelsen

- Alle besvarelser skal indledes med et kort resume af opgaveteksten, så læseren uden at kende opgaveteksten kan følge tankegangen bag besvarelsen.
- Opgaven afsluttes med en konklusion, der er tydeligt markeret som svaret på opgavens spørgsmål.
- Bemærk, at indledning og konklusion forbindes af en tekst, hvor der klart argumenteres for, at svaret bliver som skrevet.
- Læs i øvrigt side 2 i et (nyere) eksamenssæt for at se, hvilke krav der stilles til en besvarelse.
- Er det overflødigt at skrive i opgaveteksten, at modellen skal være lineær?

Find parametre mv.

Nedenstående tabel viser antallet af anmeldte voldsforbrydelser i 1998 og 2006.

År	1998	2006
Antal anmeldte voldsforbrydelser	13 422	19 577

Udviklingen kan i perioden efter 1998 med god tilnærmelse beskrives ved modellen

$$y = a\,x + b \quad ,$$

hvor x er antal år siden 1998, og y er antal anmeldte voldsforbrydelser.

a) Benyt tabellens oplysninger til at bestemme tallene a og b.

b) Hvad fortæller tallene a og b om antallet af anmeldte voldsforbrydelser?

c) Hvornår vil antallet af anmeldte voldsforbrydelser ifølge modellen komme over 25.000?

Kilde: Eksamensopgave 2, 2HF091-MAC

Besvarelsen

I tabelform er der vist antallet af voldsforbrydelser i årene 1998 og 2006. Endvidere oplyses det, at udviklingen kan beskrives med en lineær model.

a) Beregning af parametre

Da tiden regnes i år efter 1998 fås begyndelsesværdien b i modellen umiddelbart:

$b = 13422$

a kan beregnes med formlen (da sammenhængen er lineær):

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ved indsættelse af tabellens tal – hvor 1998 erstattes af 0 og 2006 af 8 – fås:

$$a = \frac{19577 - 13422}{8 - 0} = 769{,}4$$

For ikke at overdrive modellens nøjagtighed, kan tallene afrundes, så modellens parametre bliver:

$a = 770$ og $b = 13400$

b) Parametrenes betydning

Modellens værdi for *b* betyder, at der i 1998 ifølge modellen blev anmeldt ca. 13.400 voldsforbrydelser.

Modellens værdi for *a* betyder, at der ifølge modellen hvert år anmeldes ca. 770 flere voldsforbrydelser (end året før.)

c) Modellens prognose

Jeg vil finde det første år, antallet af anmeldte voldsforbrydelser ifølge modellen kommer over 25.000. Derfor løser jeg ligningen $f(x) = 25000$ (og jeg benytter de ikke afrundede parametre).

Idet funktionsforskriften i modellen er $f(x)=770 \cdot x+13400$, løses ligningen:

$$\begin{aligned} 770 \cdot x+13400&=25000 \Leftrightarrow \\ 770 \cdot x+13400-13400&=25000-13400 \Leftrightarrow \\ x&=\frac{25000-13400}{770} \Leftrightarrow \\ x&=15{,}05 \end{aligned}$$

Heraf ses at 15 år efter begyndelsesåret er antallet under 25000, 16 år efter er antallet over 25000.

Det vil sige, at i år 2014 er antallet af anmeldte voldsforbrydelser ifølge modellen over 25000.

Kommentarer til besvarelsen

- Bemærk minioverskrifterne. De kan også anvendes, når der i et spørgsmål er flere delspørgsmål eller blot, hvor der beregnes mellemfacit før et egentligt svar på et stillet spørgsmål. De benyttes for at skabe en klar struktur og for at gøre besvarelsen overskuelig og let at læse.
- Regnenøjagtighed: Når der regnes, regnes der med så nøjagtige tal som muligt. Når svaret præsenteres, benyttes almindelig sund fornuft og tommelfingerregler:
- Svarets nøjagtighed skal stå i forhold til de oplyste tals nøjagtighed
  - 3 betydende cifre er ofte en fornuftig tommelfingerregel
  - Hvis fx to af siderne i en trekant er oplyst som små hele tal, vil det være fornuftigt at aflevere svaret som et decimaltal med et ciffer efter decimalkommaet.

Regression

År	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Øl (mio. liter)	574	554	527	505	476	453

Tabellen viser danskernes forbrug af øl i perioden 2005 - 2010.

Denne udvikling kan med god tilnærmelse beskrives med en lineær model.

a) Benyt alle tabellens data til at opstille en lineær model, der beskriver udviklingen i danskernes forbrug af øl som en funktion af antal år efter 2005.

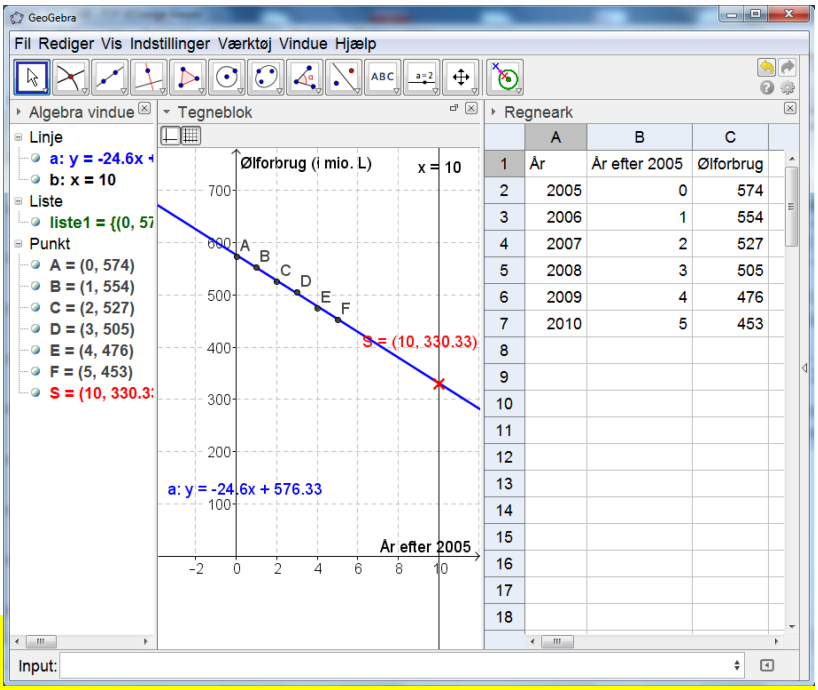
b) Hvor meget falder danskernes forbrug af øl pr. år ifølge modellen?

Bestem danskernes forbrug af øl i 2015 ifølge modellen.

Kilde: Eksamensopgave 8, hfe-MAT/B-07122012

Besvarelsen

Der er givet en tabel, der viser sammenhængen mellem tid og danskernes ølforbrug i årene 2005-10. Ifølge opgaven er sammenhængen med god tilnærmelse lineær. Dataene kan ses i regnearket til højre.



Regressionslinjen findes med kommandoen "fitLinje".Af tegningens oplysninger følger det umiddelbart, at der kan opstilles følgende model:

Modellen

x er tiden målt i antal år efter startåret 2005, og $f(x)$ er danskernes ølforbrug målt i mio. L x år efter 2005

$$f(x) = -25 \cdot x + 576$$

Da hældningskoefficienten a = -25, er der tale om et fald:

Danskernes ølforbrug falder ifølge modellen med 25 mio. L øl pr. år.

Ved at finde skæringspunktet S mellem grafen og linjen x=10 findes ølforbruget i 2015 (10

år efter begyndelsesåret 2005):

Ølforbruget i 2015 er ifølge modellen 330 mio. L

Kommentar

Advarsel! Benyt altid alle data! Du skal finde en ret linje, hvor alle tabellens oplysninger benyttes. Når der kendes flere end to punkter, skal regression benyttes (for alle typer – ikke blot lineær regression.) Du må altså ikke nøjes med at udvælge to punkter og beregne parametre alene ved hjælp af disse.

Teori: Definitioner – sætninger

Definitioner

Graf

Vi har givet en funktion, hvor både funktionens DM og VM er de reelle tal (eller en delmængde af de reelle tal). Grafen for en funktion er mængden af alle punkter i koordinatsystemet som $(x\,;f(x))$, hvor alle x-værdier i DM(f) anvendes.

En lineær funktion

En funktion er lineær, hvis grafen er en ret linje eller en del af en ret linje.

En funktions regneforskrift

En funktion f kan defineres ved, at vi får oplyst DM(f) sammen med et (matematisk) udtryk for, hvorledes man for ethvert x kan beregne $f(x)$.

Definition af en konkret (ganske bestemt) funktion som model

De to variable navngives og defineres præcist inklusive angivelse af måleenheder og definitionsmængder. Desuden beskrives sammenhængen mellem de to variable (typisk med en regneforskrift.)

Du kan se på beskrivelsen af Taxaturen (side 21).

Bemærk, at modellen ikke behøver at forudsige nøjagtigt, hvad turen koster: Det kan være, at der skal betales ekstra for en barnevogn eller for ventetid. Modeller er typisk forenklede beskrivelser af virkeligheden.

Sætning: Forskriften for en lineær funktion

Hvis funktionen *f* er lineær,kan funktionsforskriften for *f* skrives: $f(x)=a\cdot x+b$

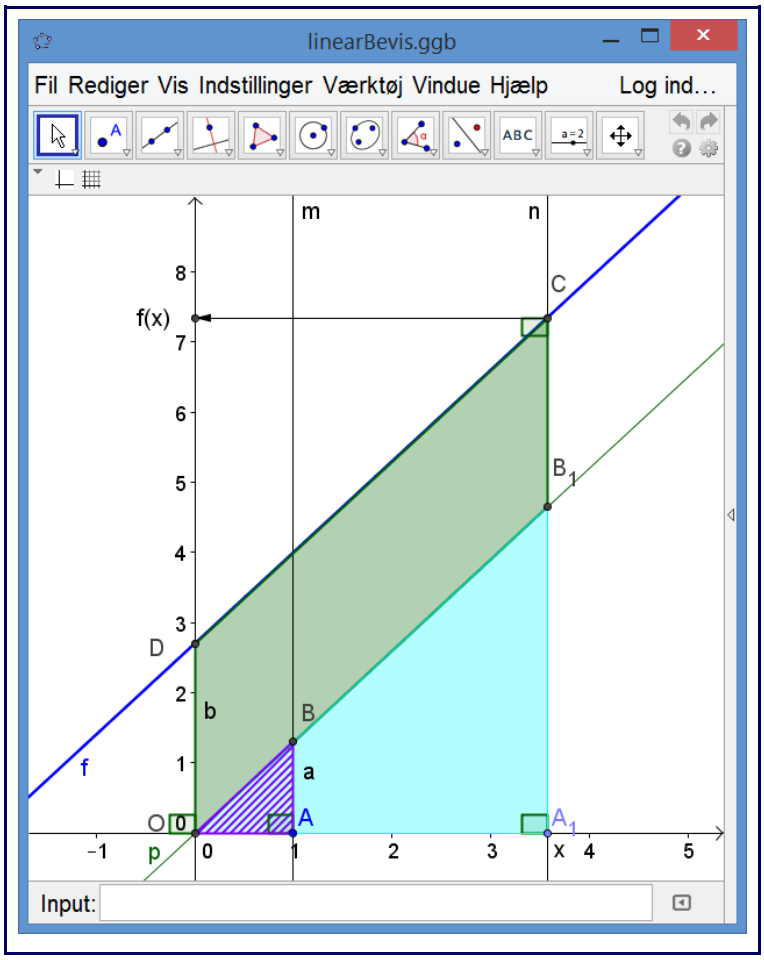
Bevis

Da *f* er lineær, er funktionens graf en ret linje. Dennes skæringspunkt med y-aksen kaldes *D*. y-værdien i *D* kaldes *b*. *O* =(0,0), *A* = (1,0).

Lad *x* være en vilkårlig værdi i definitionsmængden for *f* (dvs. DM(*f*).) Funktionsværdien *f*(*x*) kan aflæses ved at tegne en linje *n* vinkelret på x-aksen i punktet A_1 = (*x*,0); linjens skærings-punkt med grafen for *f* er C = (*x*,*f*(*x*)).

Vi tegner nu to hjælpelinjer: *m* vinkelret på x-aksen gennem *A* og *p* gennem *O* parallelt med grafen. *m* og *p* skærer hinanden i *B*, *n* og *p* skærer hinanden i B_1 Længden af linjestykket *AB* kaldes *a*.

På tegningen er både *a*, *b* og *x* positive. Er der tale om en anden kombination af fortegnene kan resten af beviset gennemføres helt tilsvarende.



De to trekanter *OAB* (lilla skravering) og $O\,A_1\,B_1$ (turkis – og skraveret ved hjørnet *O*) er begge retvinklede; desuden er deler de vinklen med spidsen i *O*. På grund af 180-graders-reglen har de også den sidste vinkel fælles og er derfor ensvinklede. Heraf følger, at de er ligedannede, dvs. at der findes en fælles forstørrelsesfaktor *k*.

k kan beregnes med længderne af siderne *OA* og OA_1 , da de ligger overfor 2 lige store vinkler. Dvs.:

$$k=\frac{|OA_1|}{|OA|}=\frac{x}{1}=x$$

Længden af linjestykket $A_1\,B_1$ beregnes som:

$$|A_1\,B_1|=k\cdot|A\,B|=x\cdot a=a\cdot x$$

Betragt nu firkanten OB_1CD (grøn). De modstående sider er parallelle: p blev tegnet parallelt med grafen, de to andre sider ligger på linjer, der begge står vinkelret på x-aksen og er derfor også parallelle. Derfor er firkanten et parallelogram. Da de modstående sider i et parallelogram er lige lange, fås at længden af linjestykket B_1C er b -for enhver værdi af x.

Nu kan y-værdien i C (eller $f(x)$) beregnes som:

$f(x)=|A_1B_1|+|B_1C|=a\cdot x+b$ (hvilket var det, der skulle bevises!)

Den omvendte sætning

Har en funktion forskriften $f(x)=ax+b$, er funktionen f lineær.

Bevis for sætningen (som øvelse)

Øvelse 16

- Tegn i et alm. retvinklet koordinatsystem de to støttepunkter (0 ; b) og (1 ; $b+a$)
- Tegn en ret linje gennem punkterne
- Lad linjen være grafen for funktionen g
- Find forskriften for g
- Begrund, at denne rette linje også er graf for for f – hvormed sætningen er bevist.

Hældningskoefficient og begyndelsesværdi

Har en funktion forskriften $f(x)=ax+b$ gælder:

- $f(0)=b$
- $f(x+1)-f(x)=a$

Bevis

- $f(0)=a\cdot 0+b=0+b=b$

  b er y-værdien svarende til x-værdien 0; derfor kaldes b *begyndelsesværdien*.

Ligeledes gælder:

- $f(x+1)-f(x)=(a(x+1)+b)-(ax+b)\Leftrightarrow$
  $f(x+1)-f(x)=(ax+a+b)-(ax+b)=ax+a+b-ax-b=a$

  Dvs. hver gang x-værdien vokser med én (= 1), ændres y-værdien med a.

  a kaldes *hældningskoefficienten* (eller stigningstallet.)

Ligefrem proportionalitet

En lineær funktion med begyndelsesværdien 0 ($b = 0$) kaldes *ligefrem proportional*.

Eksempel

Ofte, når du køber varer, vil mængden af en bestemt vare og udgiften til denne vare være ligefrem proportionale variable.

1 L mælk koster kr. 6,50, 3 L mælk koster kr. 19,50 og x L mælk koster $6{,}50 \cdot x$ kr.

Ligefrem proportionalitet mellem ændringer

Antag, at f er en lineær funktion.

Forskellen mellem 2 x-værdier: x_1 og x_2 kaldes Δx. Tilsvarende gælder for Δy.

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) \Leftrightarrow \\ \Delta y &= (a \cdot (x+\Delta x)+b) - (a \cdot (x)+b) \Leftrightarrow \\ \Delta y &= a \cdot x + a \cdot \Delta x + b - a \cdot x - b \Leftrightarrow \\ \Delta y &= a \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Dvs. at for den lineære funktion gælder, at ændringer i y-værdierne er ligefrem proportionale med ændringer i x-værdierne.

Parameterformlerne

Givet: f er en lineær funktion, hvor punkterne $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ ligger på grafen.

Så har f forskriften: $f(x) = a\,x + b$, hvor

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{og}$$

$$b = y_1 - a\,x_1 \quad \text{eller} \quad b = y_2 - a\,x_2$$

Bevis

Da f er lineær, er forskriften af typen $f(x) = a\,x + b$.

Da P ligger på grafen, gælder

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_1 \Leftrightarrow \\ a\,x_1 + b &= y_1 \Leftrightarrow \\ b &= y_1 - a\,x_1 \end{aligned}$$

Helt tilsvarende fås den anden formel for b:

$$b = y_2 - a\,x_2$$

Da de to formler for b beregner samme b, fås:

$$\begin{aligned}
y_1 - a\,x_1 &= y_2 - a\,x_2 \Leftrightarrow \\
y_1 - a\,x_1 + a\,x_2 &= y_2 - a\,x_2 + a\,x_2 \Leftrightarrow \\
a\,x_2 + y_1 - a\,x_1 &= y_2 \Leftrightarrow \\
a\,x_2 + y_1 - a\,x_1 - y_1 &= y_2 - y_1 \Leftrightarrow \\
a\,x_2 - a\,x_1 &= y_2 - y_1 \Leftrightarrow \\
a(x_2 - x_1) &= y_2 - y_1 \Leftrightarrow \\
\frac{a(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow \\
a &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}
\end{aligned}$$

Bemærk, at divisionen med $x_2 - x_1$ er lovlig, da forskellen er forskellig fra nul. Hvorfor?

Hermed er sætningen bevist.

Kendetegn for en lineær funktion

- Hvis funktionen er lineær, er grafen en ret linje (eller en del af en ret linje) – ifølge definitionen
- forskriften er af typen $f(x)=a\,x+b$ - ifølge sætningen ovenfor
- enhver ændring i x-værdien er ligefrem proportional med den tilsvarende ændring i y-værdien
- når en vilkårlig x-værdi vokser med 1 vokser y-værdien med a (ved addition)

Omvendt: Hvis det vides, at

- grafen en ret linje (eller en del af en ret linje) eller
- forskriften er af typen $f(x)=a\,x+b$ eller
- enhver ændring i x-værdien er ligefrem proportional med ændringen i y-værdien

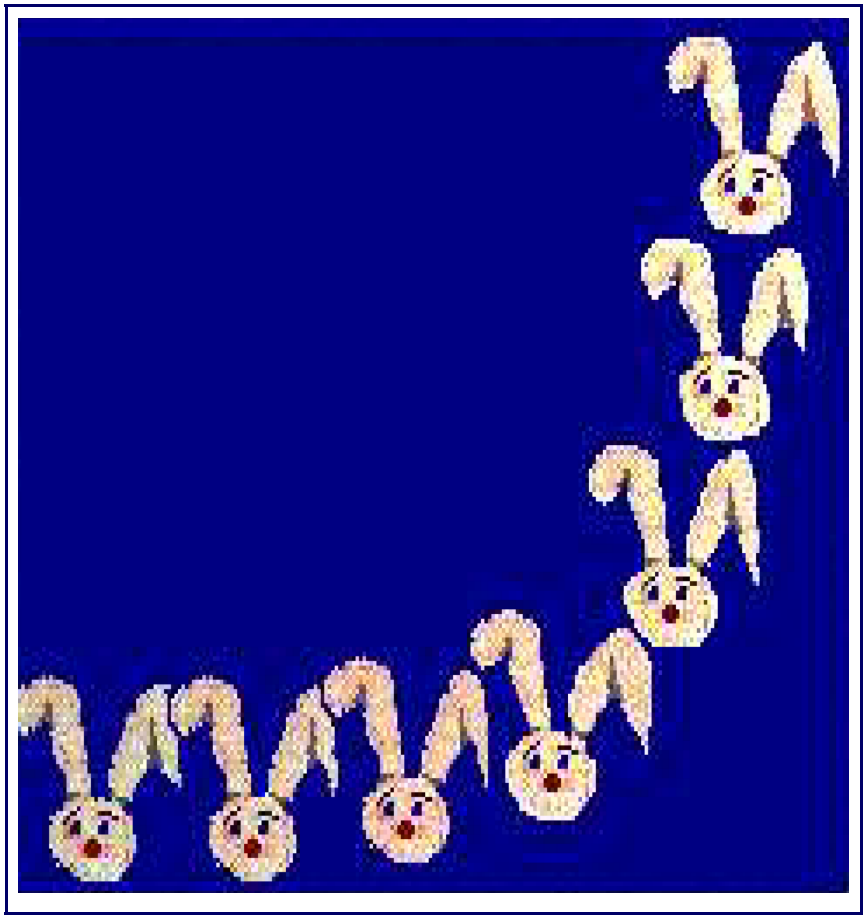
er der tale om en lineær funktion.

Oversigt

Du skal nu kunne:

- opstille lineære modeller
  - beregne parametre
  - finde regressionslinjer
  - genkende en lineær funktion eller lineær sammenhæng
  - huske formler for parametre
  - Du skal benytte regressionsanalyse til beregning af parametre, når der er givet mere end to samhørende værdier af de variable
  - Du skal kunne benytte en PC hensigtsmæssigt
  - Du skal bruge besvarelserne på eksamensopgaverne som model for dine afleveringsopgaver
  - Du skal kunne huske og forstå definitioner og sætninger inklusive beviser

Den eksponentielle funktion



Øvelser og eksperimenter

Eksponentiel vækst

Vilde kaniner

Øvelse 17

Forestil dig, at du bor på en ø med masser af plads, med grønne marker og der er hverken kaniner eller ræve eller andre naturlige kaninfjender.

Og så får du et par kønsmodne kaniner et tidligt forår. Et par kan få op til ca. 50 killinger pr. år fordelt på mange kuld, og i hvert fald året efter er alle killingerne kønsmodne om ikke før.

Hver generation kan leve i adskillige år, men det præcise antal år spiller ikke nogen større rolle for populationens udvikling.

- Du skal udfylde sildebenet herunder, der viser sammenhængen mellem de to variable: tiden og populationens størrelse. Benyt 3 betydende cifre i resultaterne. Benyt skrivemåden: 123E3 for 123.000.
- Din ø er 100 kvadratkilometer stor. Hvis dine beregninger holder stik, hvor meget plads har så hver kanin 10 år efter starten?
- Hvad er dine kommentarer til beregningerne?

Antal år efter startåret	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Populationens størrelse (primo)											

Vækstfaktoren

Mange størrelser kan i en periode vokse som kaninpopulationen: populationens størrelse næste år beregnes som produktet af dette års størrelse og en *vækstfaktor*. Mere generelt kan det formuleres:

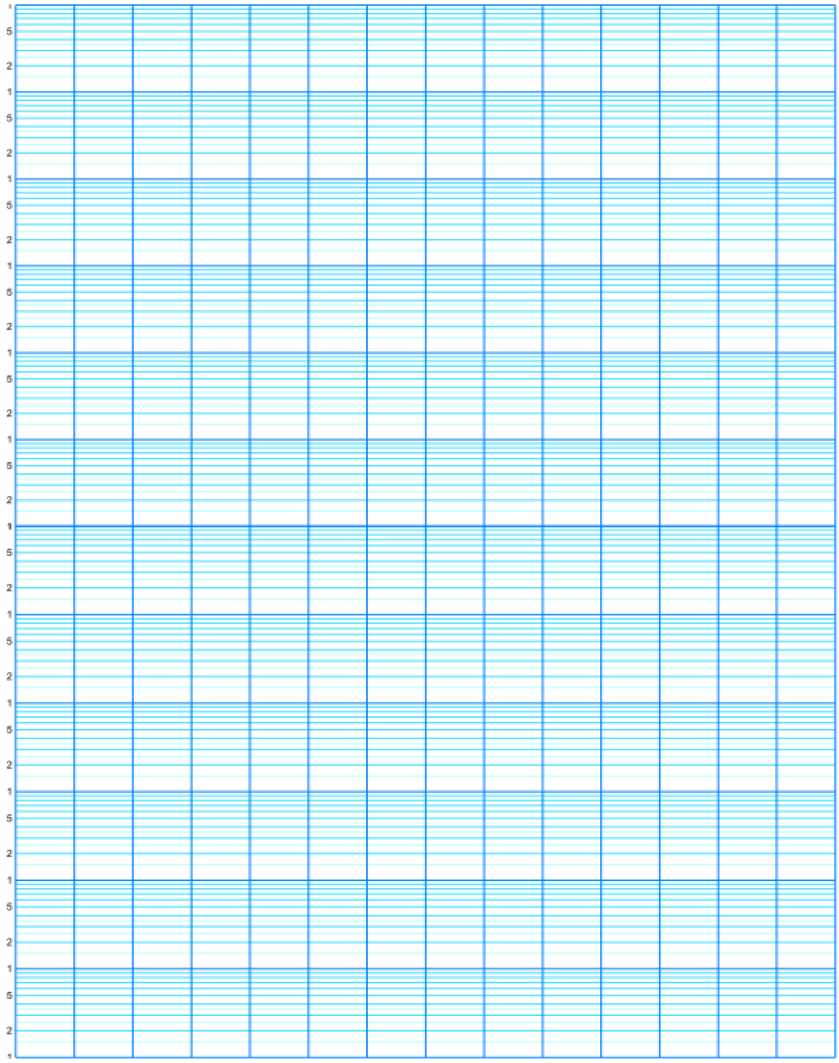
$f(x+1)=f(x)\cdot a$, hvor a er vækstfaktoren.

Enkeltlogaritmisk papir

Til højre ser du et enkeltlogaritmisk papir med 12 dekader. 1. aksen har en normal lineær skala, men 2. aksen har en logaritmisk skala. Dvs.: hver gang y-værdien bliver 10 gange større, går man den samme længde op ad y-aksen. Men det gælder i øvrigt for alle faktorer - ikke blot 10.

Du skal bemærke, at på 2. aksen står der 1 nederst, men det dukker op 12 gange igen: hver gang er y-værdien 10 gange større. Vi bør altså erstatte alle 1'erne med hhv. 1, 10, 100, 1000, …, 10^{12}.

Øvrige tal tænkes ændret tilsvarende, men rettes ikke.



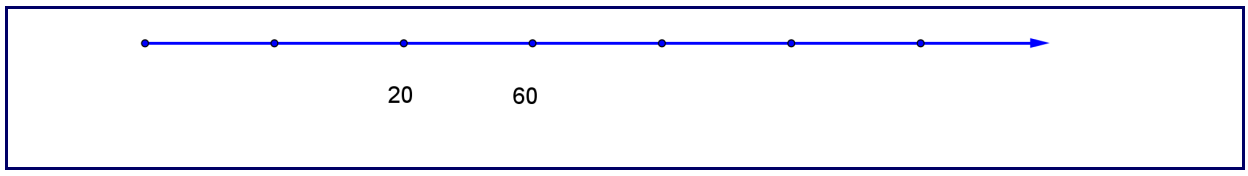
Øvelse 18

Indsæt punkter med koordinaterne, som de fremgår af tabellen i øvelsen med de vilde kaniner, på dette enkeltlogaritmiske papir, idet du vælger at vise tid på 1.-aksen og populationsstørrelse på 2.-aksen.

Kommenter tegningen!

Øvelse 19

- Her er en akse med en logaritmisk skala. Skriv de manglende tal på figuren.



Simuleret radioaktivitet

Øvelse 20

Du – eller bedre: en gruppe – starter med at have 100 terninger. De simulerer (ligner / efterligner) det radioaktive materiale. Radioaktivt materiale henfalder – dvs. den radioaktive stråling bliver mindre og mindre. For nogle materialer går det meget hurtigt og for andre meget – meget langsomt. Men for alle typer er der tale om, at i løbet af en bestemt periode for hver materialetype henfalder en bestemt brøkdel af stoffet. Denne brøk er et gennemsnit; det faktiske henfald varierer tilfældigt.

Ved denne simulation leger vi, at i tiden mellem 2 runder fjernes i gennemsnit 1/6 af radioaktiviteten.

- Noter, at du / I har 100 terninger (eller hvor mange I nu har.)
- Slå med alle terningerne – fjern 6-erne – og tæl dem. Beregn antallet af de de resterende. Noter antallet i skemaet.

Runde	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Terninger	100									
Runde	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Terninger										
Runde	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Terninger										

- Slå med de resterende terninger – fjern 6-erne – og tæl dem. Beregn igen antallet af dem, der nu er tilbage. resterende. Noter antallet i skemaet.
- Gentag sidste punkt, indtil alt materiale er henfaldet – det vil sige, at alle terninger er fjernede – eller efter 30 runder. Noter antallet der er tilbage.
- Indtegn talparrene (x-værdier er tidspunkterne 0, 1, 2, 3 ... og y-værdierne er det tilsvarende antal resterende terninger) i GeoGebras regneark og find ved regression sammenhængen. Du markerer data i regneark og vælger i billedmenuen regressionsanalyse: Som regressionsmodel vælges Vækst (eller Eksponentiel.) Forskellen er alene skrivemåden for vækstfaktoren.
- Skriv her den fundne funktion: _____
- Kunne du have gættet, at den ser sådan ud? Hvorfor?
  - Svar:

Øvelse 21

Benyt GeoGebras Tegneblok

- Placer et punkt A et vilkårligt sted i planen.
- Vælg to poitive tal: a og b, ikke alt for store.
- Find et nyt punkt $B = (x(A) + a\ ,\ y(A)\cdot b)$
- Find igen et nyt punkt C på samme måde, hvor C og B erstatter B og A.
- Fortsæt på tilsvarende måde en 3-4 gange mere
- Hvad kan der siges om de tegnede punkter?
- Hvad kan du regne ud med viden om koordinaterne til A og de to tal a og b?
- Prøv at find sammenhængen med regressionsanalyse!

Logaritmer

Ideen bag logaritmer

Der var engang, man hverken havde lommeregnere eller bærbare PC'er med matematik-programmer. Dengang tog det tid at addere tal og endnu mere at multiplicere tal.

Selvfølgelig kunne meget arbejde spares ved at regne med færre betydende cifre, men inden for fx astronomi og skibsfart var det vigtigt, at kunne regne yderst nøjagtigt. Derfor begejstres matematikeren Henry Briggs også, da han hører om Napiers logaritmer, som ændrer en multiplikation til en addition samt to tabelopslag.[5]

Øvelse 22

- Vurder hvor mange enkelt operationer, der skal til, for at beregne hhv. summen og produktet af to 10-cifrede tal.

Ideen kort fortalt

I tabellen er x-værdierne tal, vi gerne vil multiplicere. Omskrives fx $1000 = 10^3$, kaldes eksponenten 3 for log(1000). Tilsvarende for alle andre værdier af x.

x	0,01	0,1	1	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000
log(x)	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7

Lad os finde produktet af 100 og 10.000. Så fås ved opslag i tabellen:

log(100) = 2 og log(10.000) = 4

5 Afprøves i projektet "Astronomiske beregninger".

De to logaritmer adderes:

log(100) + log(10.000) = 2 + 4 = 6

Nu læses logaritmetabellen nedefra og op: til logaritmen 6 svarer tallet 1 million eller 1.000.000, som netop er produktet af 100 og 10.000.

Det ses nemt, at metoden giver rigtige resultater, da det følger af regnereglen for potenser:
$10^2 \cdot 10^4 = 10^{2+4} = 10^6$ eller generelt: $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$

Med denne beskedne tabel er tidsgevinsten beskeden. Napiers fortjeneste var at lave en tabel for uhyre mange x-værdier angivet meget nøjagtigt med de dertil hørende logaritmeværdier. Napier brugte ikke 10-talslogaritmen som her; den blev udviklet af hans arvtager Henry Briggs.

John Napier of Merchiston (1550 - 1617)

John var en skotsk adelsmand, der interesserede sig for astronomi. I astronomiske beregninger indgår mange multiplikationer, hvor det er vigtigt at resultaterne er nøjagtige: dvs. både faktorerne og produktet skal angives med mange betydende cifre.

Du vil sikkert synes, at det at beregne 578·387 ville være uoverkommeligt; det var ikke noget problem for sir John. Men hvis de trecifrede tal blev 10-cifrede og der var mange af den slags problemer, var det et tidkrævende arbejde.

Derfor ofrede han mange år af sit liv på at skrive "Mirifici Logarithmorum canonis descriptio" og "Mirifici Logarithmorum canonis constructio" som indeholder hhv. tabeller og konstruktionsforklaringer. Ideen var at gennemføre multiplikationer som additioner af de tilsvarende potensers eksponenter. En multiplikation kunne så gennemføres ved et tabelopslag for hver faktor, en addtion af tallene fundet i tabellen, og endelig kunne produktet findes ved et opslag efter summen i tabellen. Både Tycho Brahe (som Napier sendte sine foreløbige resultater til) og Kepler kunne anvende logaritmerne som en enorm hjælp; på samme tid udbredes kendskabet til 10-talssystemet som en yderligere hjælp.

Sir John nåede dog også at blive far til 12 børn.

For yderligere informationer: Se http://www.johnnapier.com/Default.htm

Regneregler for log(x)

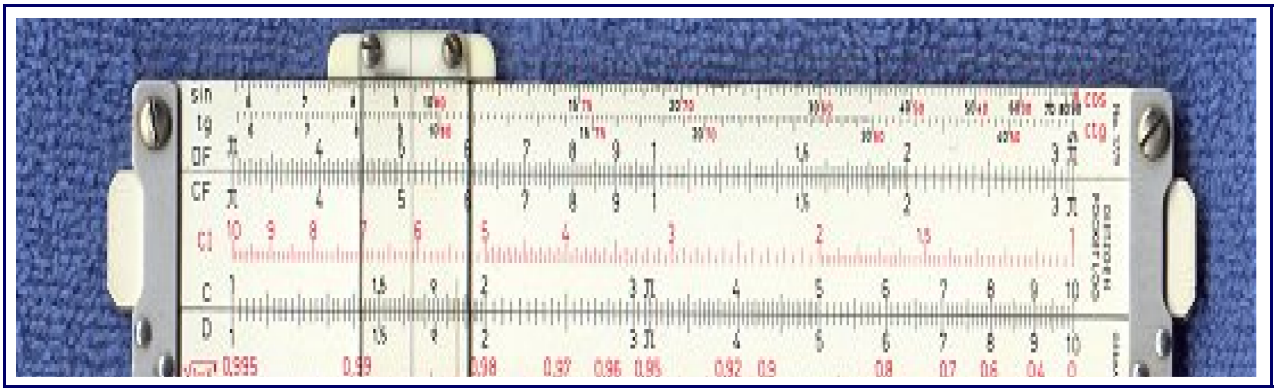
log er en funktion, hvor DM =]0 ; ∞]; VM =] −∞ ; ∞] hvor følgende regler gælder:

1. $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$
2. $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$
3. $\log(a^n) = n \cdot \log(a)$
4. $\log(1) = 0$

Betegnelser

På danske lommeregnere benyttes to logaritmefunktioner: den naturlige ln(x) og titalslogaritmen log(x). I GeoGebra benyttes begge betegnelser for den naturlige logaritmefunktion; titalslogaritmen kaldes i GeoGebra for lg(x).

Regnestokken



Indtil 1970'erne var regnestokken et almindeligt redskab for bl.a. ingeniører, der ofte skulle gange tal med hinanden – før lommeregneren blev hver mands eje. I den simpleste udgave var den ene skala (D) skrevet på en fast lineal og den anden skala (C) var skrevet på en skyder, der kunne glide frem og tilbage inden i den første. Ved at lægge de logaritmiske skalaer i forlængelse af hinanden adderes logaritmerne, hvorved produktet kan findes. Se fx. http://www.sliderule.ca/

Teori: Definitioner - sætninger

Definition af den eksponentielle funktion

En eksponentiel funktion er en funktion med forskriften

$f(x)=b\cdot a^x;\ DM(f)=R;\ a>0;\ b>0.$

Sprogbrug

b kaldes *begyndelsesværdien*, idet det er funktionsværdien for x=0 og a kaldes *vækstfaktoren*, da funktionsværdierne ændres med faktor a, når x-værdien vokser med 1:

$f(0)=b\cdot a^0=b\cdot 1=b$

$f(x+1)=b\cdot a^{(x+1)}=b\cdot a^x\cdot a=f(x)\cdot a$

Parameterberegning I

Af ovenstående fås umiddelbart to formler til beregning af parametrene a og b:

$b=f(0)$ og $a=\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ eller specielt: $a=\dfrac{f(1)}{b}$

Indsættes x=0: $f(0+1)=f(0)\cdot a\Leftrightarrow f(1)=b\cdot a\Leftrightarrow a=\dfrac{f(1)}{b}$

og generelt fås: $f(x+1)=f(x)\cdot a\Leftrightarrow \dfrac{f(x+1)}{f(x)}=\dfrac{f(x)\cdot a}{f(x)}\Leftrightarrow a=\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$

Øvelser

Øvelse 23

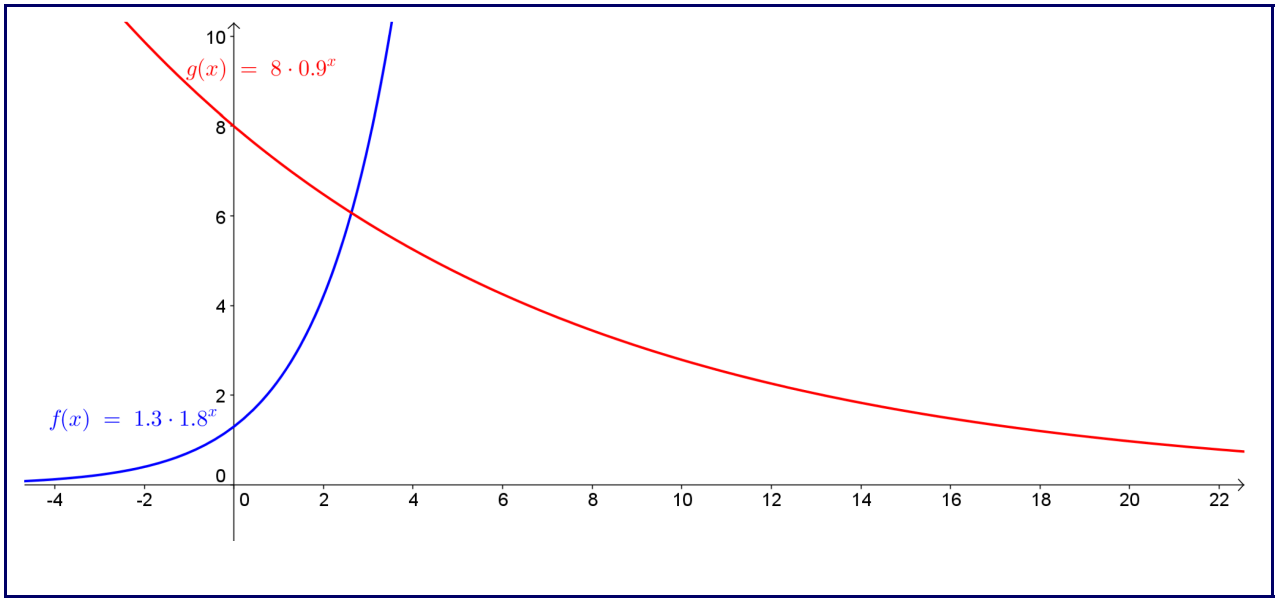
- Idet funktionerne herunder alle er eksponentielle funktioner, skal du udfylde tabellerne:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$				4	8				

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$				4	2				

x	-3	-2	-1	0	2			6	
$h(x)$		2/9	6/9			54	162		4370

Grafens udseende



Herover ses to typiske funktioners grafer: *f* (blå graf) er en voksende funktion, *g* (rød graf) er en aftagende funktion. Var de tegnet på enkeltlogaritmisk papir, ville graferne være rette linjer.

Regression

I forbindelse med at opstille en model skal du vælge en funktionstype: er det en lineær eller en eksponentiel funktion eller en helt tredje type? Sommetider er det ret klart, når man ser punkternes placering i koordinatsystemet, men sommetider kan der være flere muligheder. Hvilken type, der så skal vælges, kan ikke afgøres matematisk, men må afgøres med baggrund i den videnskab, modellen hører under.
Når funktionstypen er valgt, skal parametrene bestemmes, og så er det vigtigt, at bruge alle de data, man har. Regressionsteknikken prøver at finde den samlede "afstand" fra målepunkterne til en graf (af den valgte type), og vælger så den graf (eller funktion), der minimerer dette afstandsmål. Afstandsmålet er sådan indrettet, at en enkelt meget stor afstand vejer mere end mange små afstande.

Genfind funktionsforskriften

Øvelse 24

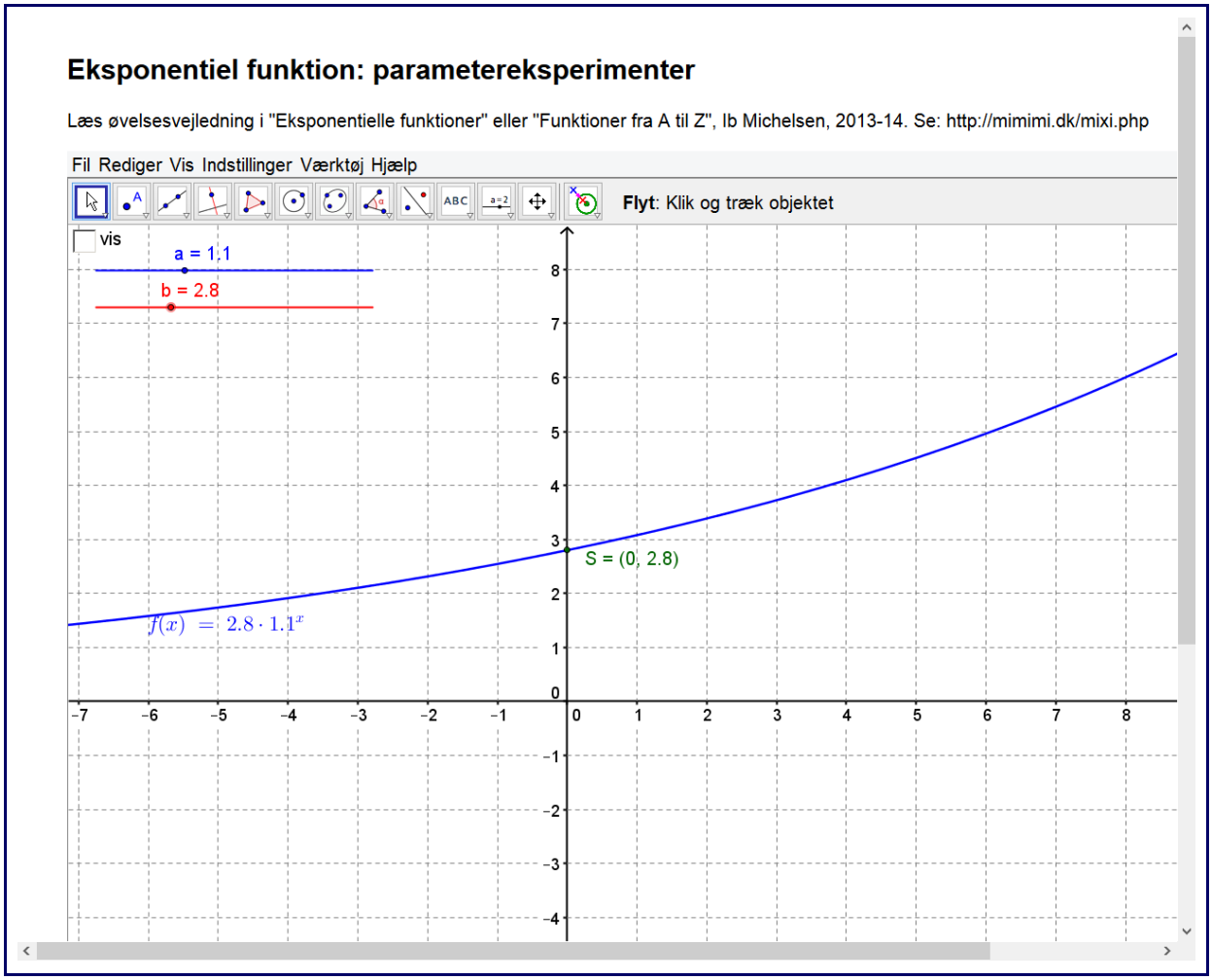
- Find koordinaterne til 6 punkter på den røde graf, indtast koordinaterne i GeoGebras regneark og lav en regressionsanalyse.
- Hvor godt passer den fundne funktionsforskrift med $g(x)=8 \cdot 0{,}9^x$?

Parametereksperimenter

Øvelse 25

Åbn linket http://mimimi.dk/mixi/funktioner/exp/parameterExp.html

- Zoom ind eller ud indtil skærmen ligner billedet her:



Du kan nu se et koordinatsystem, hvor der er tegnet grafen for funktionen $f(x)=3{,}9\cdot 1{,}1^x$

Foroven til venstre kan du se to skydere, hvormed du kan ændre parametrene a og *b*.

- Prøv det – med musen. Hold venstre museknap nede mens der trækkes i det lille punkt.
- Noter nu præcist hvad der sker med tallene og grafen, når du ændrer *a*.
- Og samme opgave for *b*.

(Fortsættes næste side)

Øvelse 25 fortsat

Betydning af a (svar)

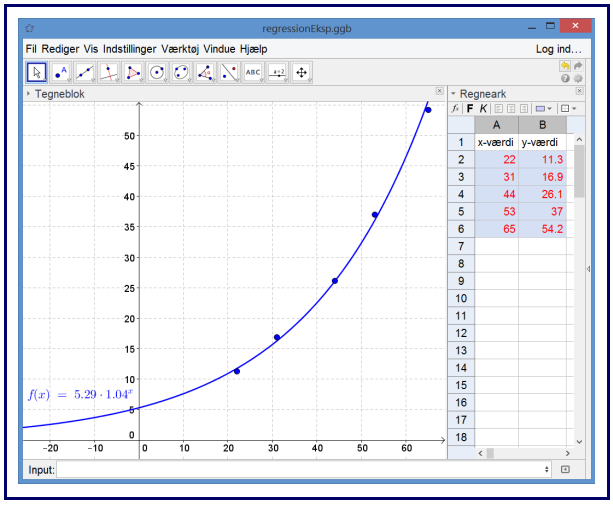
Betydning af b (svar)

- Klik så oppe i venstre hjørne, så der kommer et "flueben" i den lille firkant ved "Vis".
- Nu kan du aflæse funktionsværdier. Og ikke bare et sted: Med musen kan P flyttes, og tallene ændres automatisk tilsvarende.
- Vælg nu én bestemt funktion. Dvs. fasthold a og b. Udfyld derefter tabellen herunder, idet funktionsværdier afrundes og vises med en decimal efter kommaet.

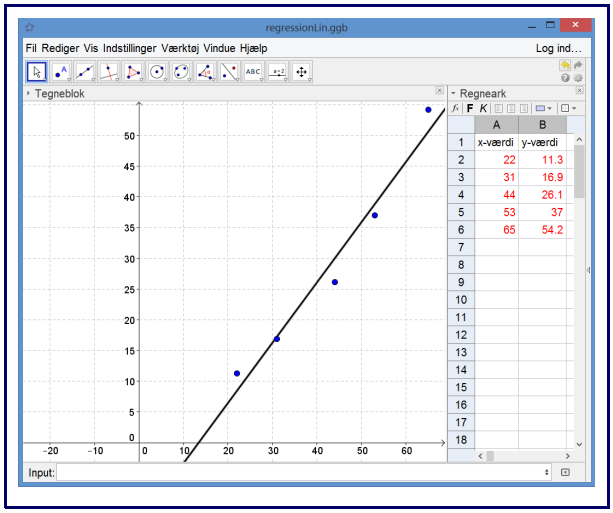
$f(x) =$										
x	-4	-1	0	1	3	4	6	8	9	12
$f(x)$										

Eksempel på beregning

Vi har fået oplysning om 5 samhørende værdier af to variable, som er indtastet i GeoGebras regneark (røde tal). Desuden oplyses det, at der skal benyttes en eksponentiel regneforskrift til at beskrive sammenhængen.
Funktionen f findes nu med kommandoen: fitVækst[liste1]. Funktionsforskriften kan vises på tegningen (som her). Du vælger i genvejsmenuen Egenskaber, faneblad: Basis.



Hvis der var valgt en lineær funktion, ville den se ud, som figuren til højre.
En god grund til ikke at vælge den lineære funktion er, at punkterne afviger systematisk fra den rette linje: Når endepunkterne ligger på samme side modsat alle de andre vises den krumning af grafen, der er typisk for den eksponentielle funktion.



Modeller

Ikke kun vilde kaniner, men også mange andre levende organismer vil følge en eksponentiel voksende udvikling, hvis de nødvendige livsbetingelser som plads, føde, vand og lys er til stede. Men som det også nemt ses, vokser sådanne funktioner hurtigere og hurtigere over enhver øvre grænse. Derfor kan ingen organisme i virkeligheden følge en eksponentiel udvikling undtagen for en kortere eller længere periode. Så hvis sådanne modeller opstilles, er det vigtigt at specificere, hvor længe de gælder.
Kapitaler, der tilskrives rente år efter år, vokser også eksponentielt. Det gælder selvfølgeligt, når der er aftalt en fast rentesats for et engagement, men det gælder også med en vis tilnærmelse, når rentesatsen svinger om et eller andet gennemsnit. Antag fx, at rentesatsen i procent har været p_1 , p_2 og p_3 .Den gennemsnitlige procent har så været

$$p=\left(\sqrt[3]{(1+p_1/100)\cdot(1+p_2/100)\cdot(1+p_3/100)}-1\right)\cdot 100 \quad \%$$

Du vil finde kapitalfremskrivning nærmere omtalt i kapitlet om rentesregning.

Temperaturforskellen mellem et objekt og dets omgivelser kan i mange tilfælde beskrives som en eksponentiel funktion af tiden, hvor temperaturforskellen bliver mindre og mindre. Og det gælder både for den skoldhede the i koppen og mælken, der lige er kommet ud af (eller ind i) køleskabet.

Et vigtigt redskab til aldersbestemmelse for arkæologer er kulstof-14 metoden: Procenten af kulstof-14 i organisk stof er nemlig en kendt aftagende eksponentiel funktion af tiden efter organismens dødstidspunkt.

Vækstfaktor og procentvis ændring

Når vi sammenligner to størrelser, begyndelsesværdien B og slutværdien S, kan vi finde vækstfaktoren a som $a=\frac{S}{B}$. $S-B$ er den absolutte ændring (eller vækst),

$r=\frac{S-B}{B}=\frac{S}{B}-1=a-1$ er den relative ændring eller (= vækstraten).

Den relative ændring kan skrives som en procent (p) ved som sædvanligt at multiplicere med 100.

Der gælder altså: $a=1+r=1+p/100$, $r=a-1$ hvor $a>0$, $r>-1$ og $p>-100$

Eksempel

Helenas vægt vokser i en periode fra 4 kg til 6 kg.

B=4, S=6

Den absolutte tilvækst er B-S: Helenas vægt vokser med (6-4) kg = 2 kg

Vækstfaktoren fås som $a=\frac{S}{B}$; dvs. Helenas vækstfaktor er $a=\frac{6}{4}=1{,}5$ og vækstraten er $r=a-1$, dvs. $r=1{,}5-1=0{,}5$. Vækstraten oversættes til procent: p %= $r\cdot 100$ %; dvs. Helenas vægt er vokset med $0{,}5\cdot 100$ % eller 50 %.

Definition af fordoblingskonstant og halveringskonstant

For en voksende eksponentiel funktion er *fordoblingskonstanten* T_2 den tid eller størrelse, x-værdien skal vokse med, for at y-værdien fordobles, dvs.: $f(x+T_2)=2\cdot f(x)$

For en aftagende eksponentiel funktion er *halveringskonstanten* $T_{½}$ den tid eller størrelse, x-værdien skal vokse med, for at y-værdien halveres, dvs.: $f(x+T_{½})=½\cdot f(x)$

Sætninger

For enhver voksende eksponentiel funktion findes der en fordoblingskonstant T_2 og for enhver aftagende eksponentiel funktion findes der en halveringskonstant $T_{½}$.

$T_2=\frac{\log(2)}{\log(a)}$ og $T_{½}=\frac{\log(½)}{\log(a)}$

Bevis

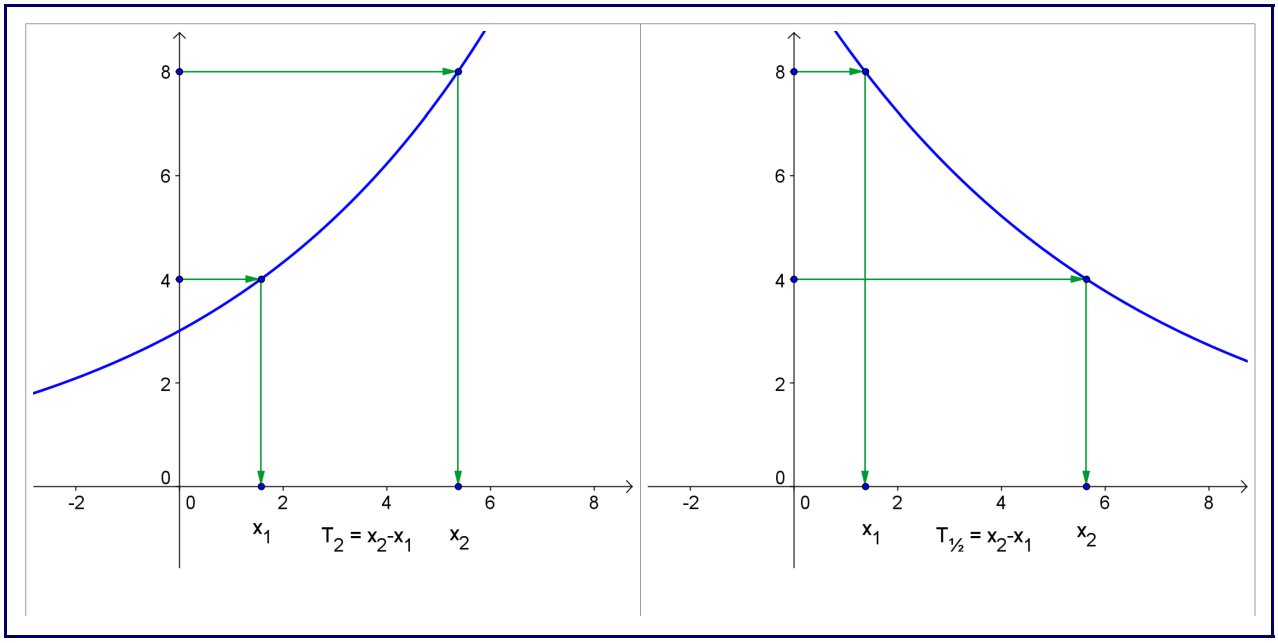
Vi antager, at vi har en voksende eksponentiel funktion og en vilkårligt valgt x-værdi. Funktionsværdien $f(x+T_2)$ skal så være dobbelt så stor som $f(x)$. Det er vor første ligning:

$f(x+T_2)=2\cdot f(x) \Leftrightarrow$	
$b\cdot a^{x+T_2}=2b\cdot a^x \Leftrightarrow$	Definition af eksponentiel funktion benyttes
$\frac{b\cdot a^{x+T_2}}{b\cdot a^x}=\frac{2b\cdot a^x}{b\cdot a^x} \Leftrightarrow$	Division med $b\cdot a^x\neq 0$ på begge sider
$a^{T_2}=2 \Leftrightarrow$	Reduktion på begge sider (ved at forkorte)
$\log(a^{T_2})=\log(2) \Leftrightarrow$	Ligningen ændres ved at benytte **bijektionen** *log*

$T_2 \cdot \log(a) = \log(2) \quad \Leftrightarrow$	På venstre side benyttes logaritmereglen for en potens: $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$
$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$	Der divideres med log(*a*) på begge sider. Bemærk: $\log(a) > 0$, da f er voksende (og derfor $a>1$.)

Konklusion: For en vilkårligt værdi i definitionsmængden findes der altså én og kun en fordoblingskonstant - og denne er den samme lige meget hvilken x-værdi, der er udgangspunktet.

Beviset for halveringskonstanten er fuldstændigt tilsvarende.



Herover vises, hvorledes konstanterne kan findes ved at vælge vilkårlige y-værdier, finde hhv. den dobbelte og den halve y-værdi, og derefter finde de tilsvarende x-værdiers differens.

Parameterberegning II

Givet: f er en eksponentiel funktion, hvor punkterne $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ ligger på grafen.

Så har f forskriften: $f(x) = b \cdot a^x$, hvor

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{y_2}{a^{x_2}}$$

Bevis

Da P liger på grafen, gælder

$$f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow$$
$$b \cdot a^{x_1} = y_1 \Leftrightarrow$$
$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Helt tilsvarende fås den anden formel for b:

$$b = \frac{y_2}{a^{x_2}}$$

Da de to formler for b beregner samme b, fås

$$\frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{y_2}{a^{x_2}} \Leftrightarrow \frac{y_1 \cdot a^{x_2}}{a^{x_1}} = \frac{y_2 \cdot a^{x_2}}{a^{x_2}} \Leftrightarrow \frac{y_1 \cdot a^{x_2}}{a^{x_1}} = y_2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{y_1 \cdot a^{x_2}}{a^{x_1} \cdot y_1} = \frac{y_2}{y_1} \Leftrightarrow \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = \frac{y_2}{y_1} \Leftrightarrow a^{x_2 - x_1} = \frac{y_2}{y_1} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt[x_2 - x_1]{a^{x_2 - x_1}} = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \Leftrightarrow$$
$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

hvormed sætningen er bevist.

Eksamensopgaver med besvarelser

En eksponentiel model

Tabellen viser antallet af registrerede tilfælde af H1N1 (svineinfluenza) i USA i 2009.

Antal dage efter 17. maj 2009	0	8
Antal registrerede tilfælde	4714	6552

I begyndelsen kunne influenzaepidemien beskrives ved en model af typen $y = b \cdot a^x$, hvor y er antal registrerede tilfælde og x er antal dage siden 17.maj.

a) Bestem tallene a og b.
b) Bestem fordoblingskonstanten.
   Gør rede for, hvad dette tal fortæller om udviklingen.
c) Hvornår ville antallet af registrerede influenzatilfælde passere 21 000 ifølge modellen?
   Kommenter modellen, når det oplyses, at antallet af registrerede influenzatilfælde passerede 21 000 efter 36 dage.

Kilde: Eksamensopgave 7, December 2010, (HF Matematik C) [Kilde: www.who.int]

Besvarelsen

a) Beregning af parametrene

Den anførte model er en eksponentiel funktion; derfor kan vækstfaktoren a beregnes med

$$a = \sqrt[x_2 - x]{\frac{y_2}{y_1}}$$

Fra tabellen noteres, at

$x_1 = 0, y_1 = 4714, x_2 = 8, y_2 = 6552$. Disse kendte tal indsættes i formlen:

$$a = \sqrt[8-0]{\frac{6552}{4714}} = 1{,}0420$$

a = 1,042

Begyndelses værdien b findes umiddelbart som $f(0) = y_1$:

b = 4714

b) Bestemmelse af fordoblingskonstanten

Fordoblingskonstanten bestemmes med formlen $T_2=\frac{\log(2)}{\log(a)}$;

de kendte tal indsættes:

$$T_2=\frac{\log(2)}{\log(1{,}042)}=16{,}84$$

Fordoblingskonstanten $T_2=16{,}8$

Det vil sige, at hver gang, der er gået knap 17 dage, vil antal af influenzatilfælde være fordoblet ifølge modellen.

c) 21.000 tilfælde! Hvornår?

Med et ukendt antal dage x skal modellens resultat være 21 000. Ligningen formuleres og løses, idet (y eller) $f(x)=4714\cdot 1{,}042^x$;

$$\begin{aligned}
y&=21.000 \Leftrightarrow\\
4714\cdot 1{,}042^x&=21.000 \Leftrightarrow\\
1{,}042^x&=\frac{21.000}{4714} \Leftrightarrow\\
\log(1{,}042^x)&=\log\left(\frac{21.000}{4714}\right) \Leftrightarrow\\
x\cdot\log(1{,}042)&=\log\left(\frac{21.000}{4714}\right) \Leftrightarrow\\
x&=\frac{\log\left(\frac{21.000}{4714}\right)}{\log(1{,}042)} \Leftrightarrow\\
x&=36{,}30
\end{aligned}$$

Dvs.: ifølge modellen passeres 21.000 efter lidt mere end 36 dage. [6]
Når det oplyses, at antallet af registrerede tilfælde passerede 21.000 efter 36 dage, er modellen bemærkelsesværdig nøjagtig.

6 Bemærk, at resultatet også kan findes direkte med formlen i formelsamlingen eller ved at løse ligningen grafisk med GeoGebra.

Kendetegn for en eksponentiel funktion

- Hvis funktionen er eksponentiel, er grafen en ret linje (eller en del af en ret linje) – tegnet på enkeltlogaritmsk papir
- forskriften er af typen $f(x)=b\cdot a^x$
- når en vilkårlig x-værdi vokser med 1 vokser y-værdien med faktor a (ved multiplikation)
- enhver ændring i x-værdien med Δx medfører, at y-værdien multipliceres med $a^{\Delta x}$

Omvendt: Hvis det vides, at enten

- grafen en ret linje (eller en del af en ret linje) tegnet på enkeltlogaritmisk papir eller
- forskriften er af typen $f(x)=b\cdot a^x$ eller
- enhver ændring i x-værdien med Δx medfører, at y-værdien multipliceres med $a^{\Delta x}$,

er der tale om en lineær funktion.

Oversigt

Du skal nu kunne:

- opstille eksponentielle modeller
  - beregne parametre
  - finde regressionslinjer
  - Du skal kunne genkende en eksponentiel funktion eller eksponentiel sammenhæng
  - Du skal kunne huske formler for parametre
- Du skal kunne benytte PC og lommeregner hensigtsmæssigt
- Du skal bruge besvarelserne på eksamensopgaverne som model for dine afleveringsopgaver
- Du skal benytte regressionsanalyse til beregning af parametre, når der er givet mere end to samhørende værdier af de variable
- Du skal kunne huske og forstå definitioner og sætninger inklusive beviser

Rentesregning

Rentetilskrivning

En kunde, der indskyder penge (en startkapital K_0) i en bank, får hver termin (dvs. en aftalt periode: fx en måned, et kvartal, et halvt eller et helt år) tilskrevet renter til kapitalen. Renterne er et beløb, der beregnes som en procent af kapitalen med rentesatsen *r*.

Eksempel

John sætter 25.000 kr. (K_0) i banken, terminen er et år, *r* = 2 % = 0,02

Et år senere er Johns kapital vokset til 102 % af den oprindelige; kaldes den nye kapital efter 1 termin K_1, fås

$$K_1 = \frac{25000}{100} \cdot 102 = \frac{K_0}{100} \cdot 102 = \frac{K_0}{100} \cdot (100+2) = K_0 \cdot (1+2/100) = K_0 \cdot (1+r)$$

I eksemplet ses, at startkapitalen vokser med faktoren (1+*r*).

Lige meget hvad beløbet er og hvad rentesatsen er, ses det nemt, at der må gælde:

$$K_1 = K_0 \cdot (1+r)$$

Lader John pengene stå i banken et år længere kan kapitalen efter 2 år (K_2)beregnes som:

$$K_2 = K_1 \cdot (1+r) = K_0 \cdot (1+r) \cdot (1+r) = K_0 \cdot (1+r)^2$$

Tilsvarende beregnes K_3 , K_4 osv. hvorefter du ser, at generelt er

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$ [7]

Denne formel kaldes *kapitalfremskrivningsformlen*. Faktoren (1+*r*) kaldes *fremskrivningsfaktoren* og svarer fuldstændigt til vækstfaktoren omtalt under eksponentielle funktioner.

Kapitalfremskrivningsformlen

Lad *startkapitalen* være K_0 , lad slutkapitalen være K_n efter *n terminer* og lad *rentesatsen* være *r* (angivet som brøk eller procent); så kan slutkapitalen beregnes som

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

Med formlen ovenover kan slutkapitalen nemt beregnes; vi vil nu omskrive formlen således, at lige meget hvilke 3 af de 4 størrelser du kender, kan du beregne den sidste.

7 Formelt bør beviset gennemføres som et induktionsbevis for de uendeligt mange værdier af *n*. Beviset hviler på, at sætningen er rigtig for *n*=1, og at når sætningen er rigtig for *n*, er den også rigtig for *n*+1.

Slutkapitalen

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

Startkapitalen

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n \Leftrightarrow$$
$$\frac{K_n}{(1+r)^n} = \frac{K_0 \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n} \Leftrightarrow$$
$$\frac{K_n}{(1+r)^n} = K_0$$

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

Rentesatsen

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n \Leftrightarrow$$
$$\frac{K_n}{K_0} = \frac{K_0 \cdot (1+r)^n}{K_0} \Leftrightarrow$$
$$\frac{K_n}{K_0} = (1+r)^n \Leftrightarrow$$
$$\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = \sqrt[n]{(1+r)^n} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = 1+r \Leftrightarrow$$
$$\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = r$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Antal terminer

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n \Leftrightarrow$$
$$\frac{K_n}{K_0} = \frac{K_0 \cdot (1+r)^n}{K_0} \Leftrightarrow$$
$$\frac{K_n}{K_0} = (1+r)^n \Leftrightarrow$$
$$\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = \log\left((1+r)^n\right) \Leftrightarrow$$
$$\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = n \cdot \log(1+r) \Leftrightarrow$$
$$\frac{\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log(1+r)} = n$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log(1+r)}$$

Øvelse 26

K_n - formlen kan betragtes som en alternativ måde at beskrive en eksponentiel sammenhæng på.

- Hvad svarer til hvad, når du sammenligner de to funktionsforskrifter?
- Vis og bevis de tilsvarende formler for den eksponentielle funktion, der svarer til de 3 (sidste af) ovenstående.

Eksempel: Beregning af K_n

En eksamensopgave i 1993 lød:

> "3000 kr. indsættes på en konto til 5 % p.a.
>
> Bestem, hvor meget der står på kontoen efter 14 år."

Jeg noterer mig, at der er tale om indbetaling af et beløb én gang, som i flere terminer forrentes med samme rente. "p.a." betyder pro anno, det vil sige (når der ikke skrives andet) at terminen er et år og at der en gang om året tilskrives rente – her 5 %. Derfor kan jeg benytte kapitalfremskrivningsformlen. I opgaveteksten vil jeg markere tallene (som gjort) og skrive besvarelsen som herunder:

Besvarelse

Da der er tale om kapitalfremskrivning, noteres:

Startkapital = $K_0 = 3000$

Slutkapital = $K_n = ???$

Rentesatsen pr. termin = $r = 0{,}05$

Antallet af terminer = $n = 14$

Disse tal indsættes i $K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$:

$$K_n = 3000 \cdot (1+5/100)^{14} = 5939{,}794 = 5939{,}79$$

Efter 14 år står der 5.939,79 kr. på kontoen

Bemærk, at i en "*tekstopgave*" beregnes svaret, og derefter formuleres svaret klart og tydeligt med hele sætninger på almindeligt dansk. Først i konklusionen skrives enheden: kroner. Svaret fremhæves.

Anvendeligheden af formlerne

Formlerne og terminologien handler om penge eller kapitaler, som forrentes med en fast procent. Der er imidlertid intet i vejen for at bruge dem i forbindelse med al anden vækst, hvor noget vokser (eller aftager) med den samme procent periode efter periode. Eksempler kunne være både kanin- og menneskepopulationer, værdien af en lastbil, intensiteten af en radioaktiv stråling osv.

Annuiteter

Opsparingsannuitet

Hvis man sætter et beløb på b kr. i banken, venter en termin, igen sætter b kr. i banken, venter en termin, igen sætter b kr. i banken ... Hvis man i alt n gange sætter b kr. i banken på denne måde med en termins mellemrum mellem hver indbetaling kan saldoen lige efter sidste indbetaling udregnes med formlen herunder idet:

Hver af indbetalingerne = b

Rentesatsen pr. termin = r

Antallet af betalinger = n

gælder:

$$A_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

hvor A_n er værdien af saldoen umiddelbart efter den sidste indbetaling.

Bevis

Værdien af de enkelte indbetalinger i sluttidspunktet beregnes med kapitalfremskrivningsformlen: den sidste har værdien b, den næstsidste værdien $b \cdot (1+r)$, så $b \cdot (1+r)^2$ … og den første har værdien $b \cdot (1+r)^{n-1}$. Den samlede værdi kan skrives som

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} b \cdot (1+r)^i = b \cdot \sum_{i=0}^{i=n-1} (1+r)^i = b \cdot S$$

Da $(1+r) \cdot S - S = (1+r)^n - 1$ fås $S = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$, hvoraf formlen følger umiddelbart.

Bemærk, at den første ligning indses nemt, hvis de to led skrives som summer på hver sin linje!

Øvelse 27

- Vis formlen for S som beskrevet ovenover

Øvelse 28

- Beregn A_n, idet b = 20.000, n = 10 og r = 2 %.

Øvelse 29

- Idet tallene fra øvelse 22 benyttes, skal du på skift beregne b, n og r (med de tre andre størrelser som kendte tal.)
  - Hvilke(n) opgave kan ikke løses uden CAS eller GeoGebras graf- og skæringsværktøj?

Gældsannuitet

Man låner et beløb på G kr. i banken i tidspunkt 0, og tilbagebetaler det med n lige store ydelser på y kr. med en termin mellem hver ydelse. Gælden forrentes med rentesatsen r. Første ydelse betales en termin efter lånets stiftelse. Ydelserne indeholder både forrentning af gælden og afdrag på gælden. Gælden kan så beregnes med formlen:

$$G = y\frac{\cdot 1-(1+r)^{-n}}{r} \quad ,$$

hvor G er gælden

Hver af ydelserne = y

Rentesatsen pr. termin = r

Antallet af betalinger = n

Øvelse 30

- Bevis formlen for en gældsannuitet
  - Hjælp: Se sagen fra långivers side: Han laver et indskud på G, som skal forrentes i n terminer. Slutværdien skal så have den samme værdi som slutværdien af alle ydelserne! Opstil den relevante ligning og løs den.

Eksamensopgaver med besvarelse

Kapitalfremskrivning

To søskende arver hver 250.000 kr.

Den ene indsætter sin arv på en konto med en fast årlig rente på 4 %.

a) Hvor stort et beløb står der på kontoen efter 5 år?

Den anden indsætter sin arv på en konto med variabel rente.

Efter 5 år står der 287.574,50 kr. på denne konto.

b) Bestem den gennemsnitlige årlige procentvise rente for denne konto

Kilde: Eksamensopgave 1 (HF Matematik C, August 2010)

Besvarelsen

a) Beregning af saldo

En person, der har arvet 250.000 kr. får dem forrentet med 4 % p.a. i 5 år. Saldoen beregnes ved kapitalfremskrivning med formlen:

$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$, hvori indsættes de oplyste tal:

$K_n = 250.000 \cdot (1+4/100)^5 = 304.163,23$

Dvs. at efter 5 år er saldoen vokset til kr. 304.163,23

b) Beregning af den gennemsnitlige rentesats

En anden person har en formue, der er vokset fra 250.000 kr. til 287.574,50 kr. i løbet af 5 år.

Den gennemsnitlige rentesats findes med formlen:

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

De oplyste tal indsættes:

$$r = \sqrt[5]{\frac{287.574,50}{250.000}} - 1 = 0,0284$$

Dvs. at rentesatsen i gennemsnit for de 5 år har været 2,84 %

Potensfunktioner

Grafens udseende

Øvelse 31

- Åbn GeoGebra og
  - indtast $a = 2.1$
  - indtast $b = 3$ og
  - $f(x) = b \cdot x^a$

Bemærk, at grafen kun tegnes i 1. kvadrant, og at der er tale om en voksende funktion

- Klik på de små ringe foran a og b i algebravinduet; nu dannes der to skydere i tegneblokken.
- Vælg i billedmenuen pilen længst til venstre (”Flyt”) og benyt den og skyderne til at ændre parametrene a og b.
- Ved at højreklikke på en skyder, vælge egenskaber og fanen skyder kan du bestemme variationsområdet.
  - For a vælges min. = -5; maks. = +5
  - For b vælges min. = +0.1; maks. = +10
- Efter at have eksperimenteret: Beskriv betydningen af parametrene størrelse for grafens udseende

Svar her:

Bemærk: Når a tilhører de hele tal ændres DM(f). Af praktiske grunde forudsættes ofte, at b>0, men det er ikke en nødvendig betingelse.

Terningen som model

Øvelse 32

I de nedenstående to tabeller regnes der med en terning med varierende kantlængde(x).

- Beregn i første tabel den tilsvarende overflade, i anden tabel det tilsvarende rumfang.

Tabel 1

Kantlængde (x)	**1/3**	1/2	1	2	3	4	6	8	9	12
Overflade (y)										

Tabel 2

Kantlængde (x)	**1/3**	1/2	1	2	3	4	6	8	9	12
Rumfang (y)										

- Undersøg i begge tabeller, hvad der sker med y-værdierne, når x-værdien vokser med en bestemt faktor. (Lav mindst 2 beregninger for hver af faktorerne 2, 3, 4 og 6.)
- Indsæt tabellernes værdier i GeoGebras regneark for begge sammenhænge, lav for hver en liste af punkter og find funktionsforskrifterne med kommandoen fitPot.
- Kontroller, at graferne går gennem alle de tilhørende punkter!
- Udfyld nu den næste tabel, der bruger y-værdierne fra de to første tabeller som henholdsvis y- og x-værdi:

Tabel 3

Rumfang (x)										
Overflade (y)										

- Benyt GeoGebra som før til at finde funktionsforskriften.
- Forklar hvorfor de tre funktionsforskrifter ser ud, som de gør!

Dobbeltlogaritmisk koordinatsystem

Øvelse 33

Tidligere blev potensfunktioners grafer tit tegnede i dobbeltlogaritmiske koordinatsystemer, fordi graferne så blev transformeret til rette linjer.

- Indret koordinatsystemt på næste side med en x-akse, der går fra 1 til 100 og en y-akse, der går fra 1 til 100.
- Tegn så mange punkter som muligt fra hver af tabellerne 1 – 3 (side 69): ligger punkterne fra én tabel på en ret linje?

Svar / Bemærkninger:

1
9
8
7
6
5
4
3
2
1
9
8
7
6
5
4
3
2
1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

Funktionstypen

De fundne funktioner er alle af typen : $f(x)=b\cdot x^a$ Denne funktionstype kaldes for potensfunktioner og er defineret for alle positive værdier af x. Se definitionen side 74.

Biologiske modeller

Selvom levende væsener normalt ikke ligner terninger, kan ovenstående godt belyse, hvorfor potensfunktioner kan benyttes til biologisk modellering.

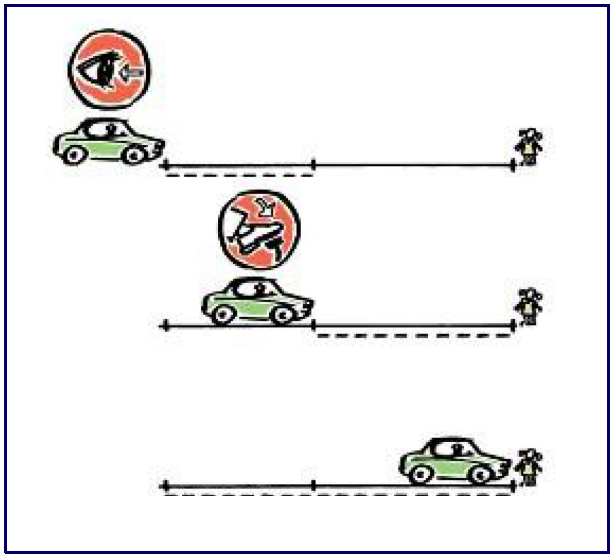
Fx kan den tredje tabel vise, at vægt og energibehov har en tilsvarende sammenhæng, idet vægten er omtrent ligefrem proportional med rumfanget og energibehovet omtrent ligefrem proportionalt med overfladen.

Sammenhængen med mange andre biologiske mål som højde, livmål, længder af knogler osv. kan på tilsvarende vis kombineres. (Se utallige gamle eksamensopgaver :-)

Andre eksempler på modeller

Standse-, Reaktions- og Bremselængde [8]

Når man kører bil og opdager en forhindring, går der lidt tid, før man sætter foden på bremsen (= reaktionstiden) og i den tid kører man et stykke: reaktionslængden. Jo hurtigere man kører, jo længere bliver reaktionslængden. Regnes der med konstant reaktionstid, betyder dobbelt så høj hastighed dobbelt så lang reaktionslængde. Der er tale om *ligefrem proportionalite*t mellem de to variable: bilens hastighed og reaktionslængden.



8 Informationen stammer fra www.sikkertrafik.dk, men linket eksisterer ikke længere.

Øvelse 34

- Skriv betegnelser på de stiplede linjer i figuren overfor
- Lav en tabel der viser sammenhængen mellem hastighed (km/time) og *reaktionslængde* (m), idet reaktionstiden forudsættes at være 1 sekund.
- Undersøg hvilke af de tre funktionstyper, der kan beskrive denne sammenhæng.
- Forklar resultatet.

Fra det øjeblik bremsen er aktiveret til bilen holder stille, kører den et stykke: *bremselængden*. Ifølge Færdselsstyrelsen kan der regnes med tabellens tal:

Hastighed (km/t)	Bremselængde (m)
30	6
50	16
60	24
70	32
80	40
110	80

- Benyt tabellens data til at finde sammenhængen ved hjælp af regression
- Forsøg med lineær, eksponentiel og potensregression.
- Begrund, hvorfor lineære og eksponentielle modeller bør forkastes – selvom punkterne ikke er voldsomt langt fra modellens graf.

Omvendt proportionalitet

x	4	8		84
y	24		96	

I mange opgaver vil du få oplyst, at de to variable er omvendt proportionale, og der vil være **givet** en x-værdi og den tilsvarende y-værdi som her (hhv. 4 og 24.) **Opgaven** består så så i at finde tilsvarende talpar, hvor den ene værdi kendes.

Løsningsmetoden er: at multipliceres en x-værdi med k, skal den tilsvarende y-værdi divideres med k. Eller hvis x-værdien divideres med k, skal y-værdien multipliceres med k.

Du vil finde tallet under x-værdien 8. Faktoren k (tallet du multiplicerer 4 med) er selvfølgelig 2 (=8/4), derfor skal y-værdien divideres med 2: Den nye y-værdi er altså 24/2 = 12.

Nu skal du finde tallet over y-værdien 96: 96:24 = 4; altså er det søgte tal 4:4 = 1.

Find selv det sidste tal.

Teori: Definitioner – sætninger

Definition af potensfunktion

En potensfunktion er en funktion af typen $f(x)=b\cdot x^a$ hvor $b>0$ og $x>0$.

Sætning om begyndelsesværdi

Hvis f er en potensfunktion $f(x)=b\cdot x^a$, gælder

$f(1)=b$

Bevis

$f(1)=b\cdot 1^a=b\cdot 1=b$

b kaldes funktionens begyndelsesværdi.

Sætning om lineær sammenhæng af logaritmerne

Laf f være en potensfunktion; så gælder

$f(x)=b\cdot x^a \Leftrightarrow \log(f(x))=a\cdot\log(x)+\log(b)$

Bevis

$$\begin{aligned} f(x)&=b\cdot x^a \Leftrightarrow \\ \log(f(x))&=\log(b\cdot x^a) \Leftrightarrow \\ \log(f(x))&=\log(b)+\log(x^a) \Leftrightarrow \\ \log(f(x))&=\log(b)+a\cdot\log(x) \Leftrightarrow \\ \log(f(x))&=a\cdot\log(x)+\log(b) \end{aligned}$$

Sætning om potensfunktioners vækst

Lad f være en potensfunktion; så gælder

$f(x\cdot k)=f(x)\cdot k^a$

Bevis

$f(x\cdot k)=b\cdot(x\cdot k)^a=b\cdot(x^a\cdot k^a)=(b\cdot x^a)\cdot k^a=f(x)\cdot k^a$

Bemærkninger

k kaldes vækstfaktor for x (svarende til en vækst på p %), k^a kaldes vækstfaktor for y.

Væksten for y i procent beregnes så som $(k^a-1)\cdot 100$ % = $((1+p/100)^a-1)\cdot 100$ %

Eksempel

Lad $f(x)=3\cdot x^2$
Hvis x_2 er 50 % større end x_1, gælder der for de tilsvarende y-værdier:
at y_2 er 125 % større end y_1, idet
k = 1+50/100 = 1,50 og a = 2
$k^a=1{,}50^2=2{,}25$
y-værdien vokser med (2,25−1)·100 % = 125 %, når x-værdien vokser med 50 %.

Parameterformlerne

Givet: f er en potensfunktion, hvor punkterne $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ ligger på grafen.
Så har f forskriften $f(x)=b\cdot x^a$, hvor

$$a=\frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} \quad \text{og} \quad b=\frac{y_1}{{x_1}^a}=\frac{y_2}{{x_2}^a}$$

Bevis

Da f er en potensfunktion, er forskriften af typen: $f(x)=b\cdot x^a$. Da P ligger på grafen, gælder $f(x_1)=y_1 \Leftrightarrow b\cdot {x_1}^a = y_1 \Leftrightarrow b=\frac{y_1}{{x_1}^a}$ og helt tilsvarende fås b: $b=\frac{y_2}{{x_2}^a}$

Da de to formler for b beregner samme b, fås nedenstående ligning, som omskrives som vist. Hermed er sætningen bevist.

$$\frac{y_1}{{x_1}^a}=\frac{y_2}{{x_2}^a}\Leftrightarrow$$
$$\frac{y_1\cdot {x_2}^a}{{x_1}^a}=\frac{y_2\cdot {x_2}^a}{{x_2}^a}\Leftrightarrow$$
$$\frac{y_1\cdot {x_2}^a}{{x_1}^a}=y_2\Leftrightarrow$$
$$\frac{y_1\cdot {x_2}^a}{{x_1}^a y_1}=\frac{y_2}{y_1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{{x_2}^a}{{x_1}^a}=\frac{y_2}{y_1}\Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a=\frac{y_2}{y_1}\Leftrightarrow$$
$$\log\left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a\right)=\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\Leftrightarrow$$

$$a\cdot\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)=\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\Leftrightarrow$$
$$a=\frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

Øvelse 35

- Idet grafen for en potensfunktion går gennem (6,108) og (3,27) beregnes funktionens parametre
  - Hjælp: Benyt parameterformlerne, og benyt formlen: $\log(a^b)=b\cdot\log(a)$

Definition af omvendt proportionalitet

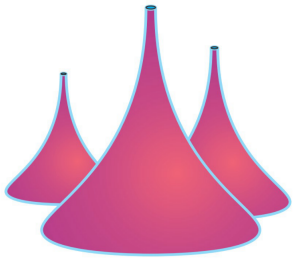
Har en funktion forskriften $f(x)=b\cdot x^{-1}$, $x>0$

er x og $f(x)$ omvendt proportionale.

Øvelse 36

Find eksempler fra dagligdagen på variable, der er omvendt proportionale.

Eksamensopgaver med besvarelser



Opstilling af en model

Tabellen viser samhørende værdier af højde og rumfang for en bestemt serie af karafler.

Højde (cm)	5	10	15	20	25	30
Rumfang (cm^3)	20	157	530	1256	2453	4239

I en model antages det, at sammenhængen mellem højde og rumfang kan beskrives ved en funktion af typen

$V(x)=b\cdot x^a$,

hvor $V(x)$ betegner rumfanget (målt i cm^3), og x betegner højden (målt i cm).

a) Benyt tabellens data til at bestemme en forskrift for V.

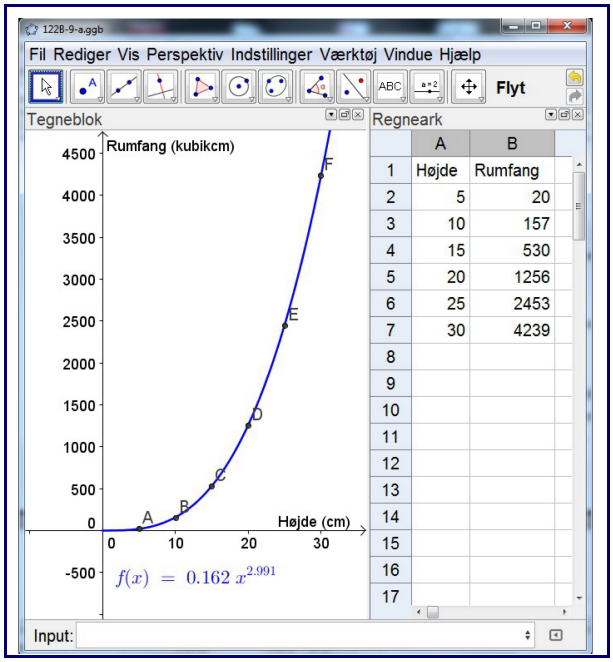
b) Bestem højden af en karaffel, der skal kunne rumme 2000 cm3.

c) Bestem hvor mange procent rumfanget af en karaffel i denne serie ændres med, når højden øges med 10 %.

Kilde: Eksamensopgave 9, stx122-MAT/B-15082012

Besvarelsen

For en bestemt serie af karafler er der oplyst samhørende værdier af højde og rumfang og at sammenhængen mellem de variable kan beskrives ved en funktion $V(x)=b\cdot x^a$, dvs. en potensfunktion.



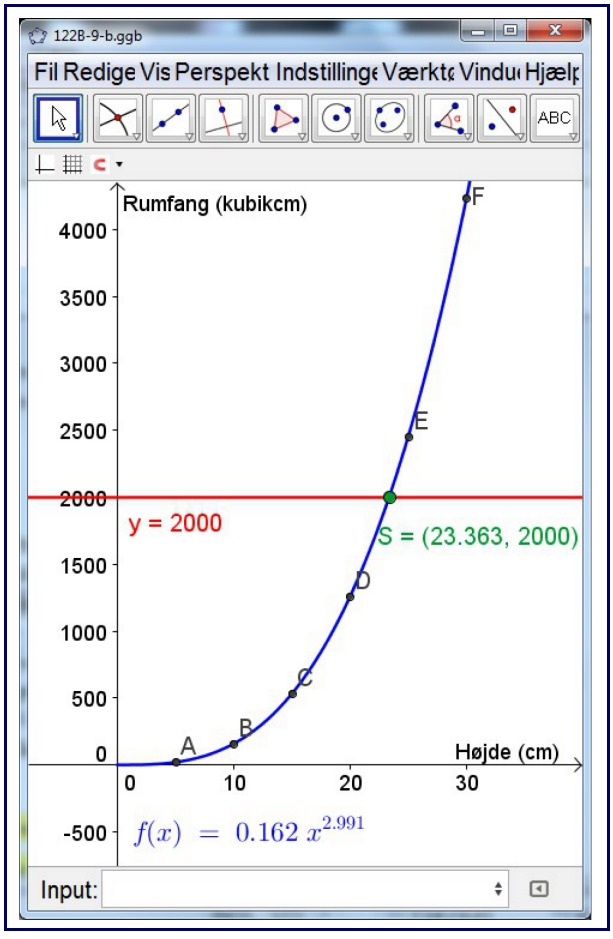
a) Forskriften for V

Modellens forskrift findes ved potensregression i GeoGebra: alle talparrene indtastes i regnearket, de tilsvarende punkter tegnes i tegneblokken og med kommandoen fitPot findes sammenhængen.

Af tegningen fremgår det, at $V(x)=0{,}162\cdot x^{2{,}99}$, hvor x er højden målt i cm og V er volumen (rumfang) målt i kubikcm.

b) Højdebestemmelse

Ligningen $f(x)$=2000 løses ved at finde skæringspunktet (S) mellem grafen og linjen y=2000:



Heraf ses, at højden skal være 23,4 cm for at karaflen skal kunne

rumme 2000 kubikcm.

c) Procentvis ændring

Når x-værdien for en potensfunktion ændres p %, ændres y-værdien med

$$((1+p/100)^a-1)\cdot 100 \quad \%$$

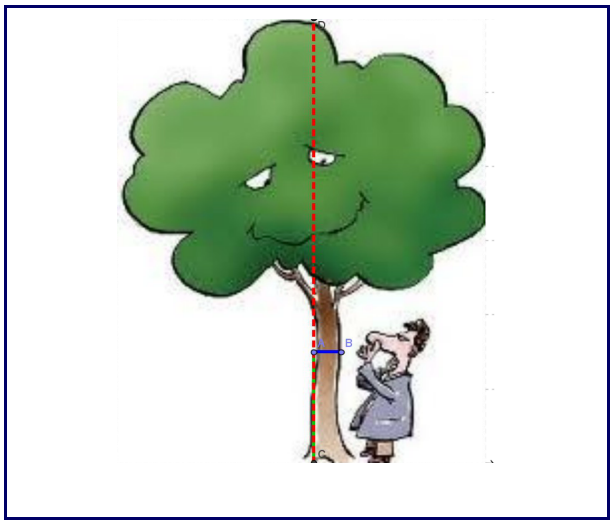
De aktuelle værdier indsættes (a = 2,99 og p= 10 %):

$$((1+10/100)^{2{,}99}-1)\cdot 100=33{,}0 \quad \%$$

Når højden vokser med 10 % vokser rumfanget med 33%

Regning med vækstfaktorer

Sammenhængen mellem diameter og højde for visse amerikanske træer kan beskrives ved modellen $y = 21{,}4 \cdot x^{0{,}631}$
hvor x (meter) er træets diameter 1,5 meter over jorden, og y (meter) er træets højde.
Et bestemt træs diameter er over en periode vokset med 40 %.
a) Hvor mange procent højere er dette træ blevet?
Kilde: T. McMahon: Size and shape in biology, Science 179, 1973.
(Hf, Matematik C, maj 2006, opgave 8)



Besvarelse

x er længden af diameteren (AB – vist som blåt linjestykke); y er højden (CD – vist som stiplet rødt linjestykke).
At x-værdien forøges med 40 % svarer til at x-værdien ganges med faktoren $k = 1{,}40$. Da sammenhængen beskrives med en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ gælder det: at når x-værdien vokser med faktor k vokser y-værdien med faktor k^a
I eksemplet her fås ved indsætning, at y-værdien vokser med faktoren: $1{,}40^{0{,}631} = 1{,}2365 = 1{,}237$
Dvs. at et træ, der har en 40 % større diameter, er 23,7 % højere (ifølge modellen.)[9]

Parametre, ligning, vækst

For et bestemt fragtskib har man målt sammenhørende værdier af motoreffekt og fart.

9 Bemærk, at der optræder en overflødig oplysning i opgaven – hvilket er usædvanligt.

Motoreffekt (kW)	1537	2003	2637	3489	4537	5755	7606
Fart (knob)	10	11	12	13	14	15	16

I en model kan sammenhængen beskrives ved en funktion af typen

$f(x)=b\,x^a$.

hvor $f(x)$ er farten (målt i knob) ved en motoreffekt på x (målt i kW).

a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b.

b) Hvor hurtigt sejler skibet, når motoreffekten er 8000 kW?

c) Hvor mange procent øges farten, når motoreffekten øges med 30%?

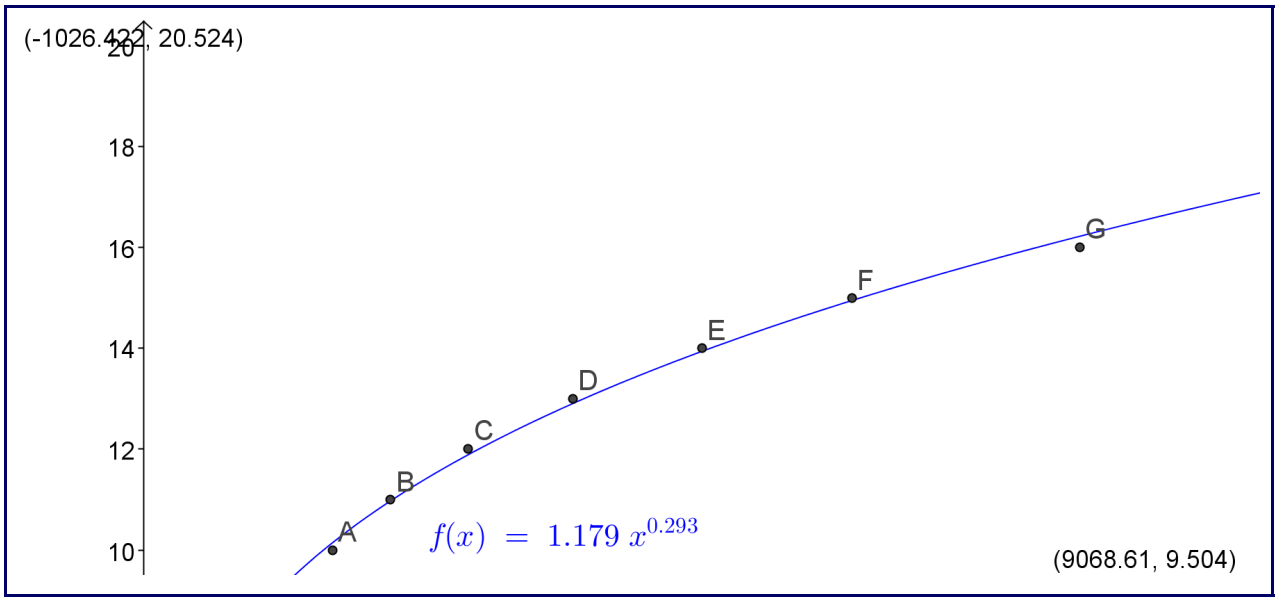
Kilde: stx, Matematik A, maj 2013, 29. maj, opgave 8

Besvarelse

Beregning af parametre

Tabellens data indtastes i GeoGebras regneark. Funktionen f findes ved regression (med kommandoen FitPot) og parametrene kan aflæse i funktionsforskriften:

a = 0,293 og b= 1,18



Skibets fart

Når motoreffekten er 8000 kW, dvs. x = 8000, beregnes hastigheden (farten) som

$$f(8000) = 1{,}18 \cdot 8000^{0{,}293} = 16{,}46 = 16{,}5$$

Dvs. med motoreffekten 8000 kW er den tilsvarende fart 16,5 knob.

Procentvis forøgelse af fart

Skibets motoreffekt øges med p = 30 %.

Forøgelsen af hastigheden p_y beregnes med formlen:

$$p_y = ((1 + p/100)^a - 1) \cdot 100 \quad \%$$

De kendte tal indsættes:

$$p_y = ((1 + 30/100)^{0{,}293} - 1) \cdot 100 \quad \% = 8{,}0\ \%$$

Farten øges med 8 ,0 %

Kendetegn for en potensfunktion

- Hvis funktionen er potensfunktion, er grafen en ret linje (eller en del af en ret linje) tegnet på dobbeltlogaritmisk papir
- forskriften er af typen $f(x)=b\cdot x^a$
- enhver ændring i x-værdien med faktor k medfører en ændring i y-værdien med faktor k^a
- grafen tegnes kun i 1. kvadrant

Omvendt: Hvis det vides, at

- grafen en ret linje (eller en del af en ret linje) tegnet på dobbeltlogaritmisk papir eller
- forskriften er af typen $f(x)=b\cdot x^a$ eller
- enhver ændring i x-værdien med faktor k medfører en ændring i y-værdien med faktor k^a

er der tale om en potensfunktion.

Oversigt

Du skal nu kunne:

- opstille modeller med potensfunktioner
  - beregne parametre
  - finde regressionslinjer
  - finde funktionsværdier
  - løse ligninger som $f(x)=k$
  - vurdere modellers kvalitet og gyldighed
- genkende en potensfunktion på funktionsforskrift, graf eller beskrivelse af vækstforhold
- huske formler for parametre
- benytte PC hensigtsmæssigt
- bruge besvarelsen på eksamensopgaven som model for dine afleveringsopgaver
- huske og forstå definitioner og sætninger inklusive beviser

Stikordsregister

1. aksen....10
2.-aksen....10
abscisseaksen....10
absolutte ændring....52
afhængige variabels....7
aftagende....19
Annuiteter....63
begyndelsesværdien....37
begyndelsesværdien, eksponentiel funk....48
bijektion....19
Cartesiske koordinatsystem....7
CAS....15
Definitioner, potensfunktion....74
definitionsmængden....10, 18
differentialregning....7
Dobbeltlogaritmisk koordinatsystem....70
eksponentielle funktion....48
eksponentielle funktion, definition....48
enkeltlo-garitmisk papir 43
fordoblingskonstanten....53
fremskrivningsfaktoren....60
funktions regneforskrift, definition....35
funktionsforskrift....7
globalt maksimum....20
globalt minimum....20
graf....7
Graf, definition....35
Gældsannuitet....64
halveringskonstanten....53
Henry Briggs....46
hældningskoefficienten....37
injektion....19
integralregningen....7
Invers funktion....22
inverse funktion....22
kapitalfremskrivningsformlen....60
Kombinationer af funktioner....23
Kontinuitet....23
Kontinuitet i punkt....23
kurver....26
kvadrant....7
ligefrem proportional....38
ligefrem proportionalitet....72
ligninger....15, 25
lineær funktion, definition....18, 35
lineær regression....12
lineære funktion....27
lokalt maksimum....19
lokalt minimum....20
Modeller....21
Modeller, eksponentielle....52
monoton....20
Napier....46
Omvendt proportionalitet....73
omvendt proportionalitet....76
omvendte funktion....22
Opsparingsannuitet....63
ordinataksen....10
origo....7
parameteren....9
Parameterformlerne, potensfunktion....75
Parameterfremstilling....26
radioaktivitet....44
Regneregler for log....47
Regression....11, 34, 49
Regressionslinjer / Tendenslinjer....26
relative ændring....52
Rene Descartes....7
rentesatsen....60
slutkapitalen....60
startkapitalen....60
surjektion....18
sætninger, potensfunktion....74
tabel....7
Taxaturen, model....21
tekstopgave....62
terminer....60
uafhængige variabel....7
variable....7
Vingummibamser....28
voksende....19
vækstfaktor....42
vækstfaktoren....48
vækstraten....52
værdier....7
værdimængden....10, 18
Weierstrass....23