Formelsamling

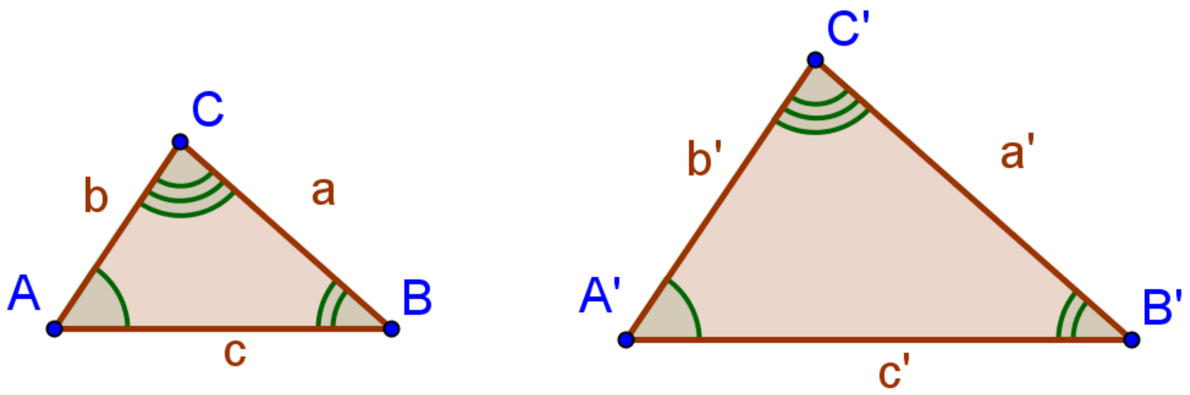
$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Ikast 2016

Ib Michelsen

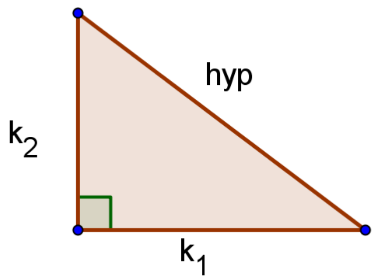
Ligedannede trekanter

- Hvis to trekanter er ensvinklede, har de proportionale sider (dvs. alle siderne i den ene er forstørrelser af siderne i den anden med samme faktor k.)
- Og omvendt! Har de den ene egenskab, har de begge egenskaber. Og kaldes ligedannede.



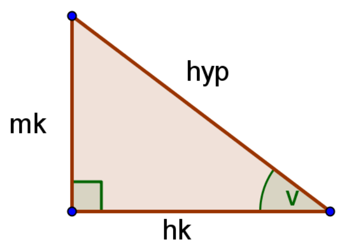
- $k=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

  (hvor sider med samme bogstav antages at svare til hinanden, dvs. de ligger overfor lige store vinkler)
- $a=k\cdot a' b=k\cdot b' c=k\cdot c'$

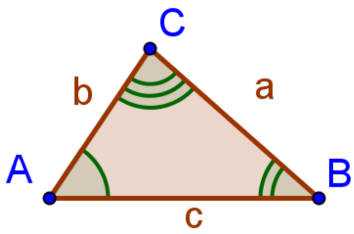


Den retvinklede trekant

- Pythagoras' sætning: $c^2=a^2+b^2$ eller $hyp^2=k_1{}^2+k_2{}^2$
- Betegnelser: Modstående katete (*mk*), hosliggende katete (*hk*) og *v* er størrelsen af den aktuelle spidse vinkel.

Find	***mk***	***hk***	***hyp***	***v***	
•	$mk=hyp\cdot\sin(v)$		$hyp=\dfrac{mk}{\sin(v)}$	$v=\cos^{-1}\left(\dfrac{hk}{hyp}\right)$	
•		$hk=hyp\cdot\cos(v)$	$hyp=\dfrac{hk}{\cos(v)}$	$v=\sin^{-1}\left(\dfrac{mk}{hyp}\right)$	
•	$mk=hk\cdot\tan(v)$	$hk=\dfrac{mk}{\tan(v)}$		$v=\tan^{-1}\left(\dfrac{mk}{hk}\right)$	

En vilkårlig trekant



- Sætning om **vinkelsummen** i en trekant

  $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$
- **1. arealsætning**: $T = ½ \cdot g \cdot h$
- **2. arealsætning**: $T = ½ \cdot bc \cdot \sin(A)$
  - dvs. det halve produkt af to sider og den mellemliggende vinkel
- **3. Herons formel**: $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

  hvor s er trekantens halve omkreds, dvs. $s = ½ \cdot (a+b+c)$
- **Sinusrelationerne**
  - $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$ til beregning af sider
  - $\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$ til beregning af vinkler
    - Ved løsning af ligningen omskrives til fx $\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(B) \cdot a}{b}\right)$
  - Lommeregneren vil som løsning foreslå en vinkel i intervallet]0 ; 90]; den rigtige løsning kan være supplementvinklen eller begge. Kontroller: Vinkelsummen i trekanten og reglen om, at overfor den mindste vinkel ligger den mindste side. Om muligt: Benyt cosinusrelationerne.
- **Cosinusrelationerne**
  - $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(C)$ eller $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(C)}$ til beregning af sider
    - Bemærk, at siden på venstre side, svarer til vinklen på højre side.
  - $\angle C = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$ til beregning af vinkler

Tal

1. N Naturlige tal 1,2,3, …
2. Z Hele tal …, -2, -1, 0, +1, +2, +3. …
3. Q Alle brøker hvor tæller og nævner begge er hele tal
4. R Reelle tal som bl.a. omfatter rødder og π og *e* og mange andre transcendente tal
5. C Komplekse tal

Bemærk, at N er en delmængde af Z, som er en delmængde af Q, som er en delmængde af R, som er en delmængde af C.

Q, R og C er alle *legemer*, fordi de opfylder de nedenstående betingelser.

Legemer

For et legeme gælder, at der er givet en mængde (fx R) og to operatorer (der ofte skrives som + og ●). Operatoren virker som en funktion: +(3,5) = 8 svarende til den almindelige skrivemåde: 3+5=8. Bemærk, at når 3 og 5 tilhører legemet R er resultatet (funktionsværdien) også et reelt tal.

For legemer gælder nedenstående regler. *a, b, c* er vilkårlige elementer i legemet.

1. $a+b=b+a$ Den kommutative lov for *addition*
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ Den associative lov for *addition*
3. 0 Der findes et nulelement, dvs. $a+0=a$
4. $-a$ For alle elementer a i legemet findes der et modsat element ($-a$), således at $a+(-a)=0$
5. $a\cdot b=b\cdot a$ Den kommutative lov for *multiplikation*
6. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ Den associative lov for *multiplikation*
7. 1 Der findes et et-element $1\neq 0$, så $a\cdot 1=a$
8. a^{-1} For alle elementer a (med undtagelse af nulelementet) findes der et modsat element mht. multiplikation.[1] Dvs. $a\cdot a^{-1}=1$
9. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ Den distributive lov

1 Nogle bruger betegnelserne multiplikativ og additiv invers.

Diverse algebra regler

- Minusparenteser $a-(b+c-d)=a-b-c+d$
- Gange parentes med parentes $(a+b)(c+d-e)=ac+ad-ae+bc+bd-be$
- Kvadratet på en toleddet størrelse $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ og $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$
- To tals sum gange de samme tals differens $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
- Brøk gange tal $\frac{a}{b}c=\frac{ac}{b}$
- Brøk gange brøk $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
- Forlænge brøk $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$
- Forkorte en brøk $\frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}$
- Dele med brøk $a:\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$
- Dele brøk med tal $\frac{a}{b}:c=\frac{a:c}{b}=\frac{a}{b\cdot c}$
- Dele en flerleddet størrelse $\frac{a+b-c}{q}=\frac{a}{q}+\frac{b}{q}-\frac{c}{q}$
- Dele et produkt $\frac{(ab)}{c}=\frac{a}{c}\cdot b=a\cdot\frac{b}{c}$

Den lineære funktion

- Kendetegn
  - Navnet ”Den lineære funktion”
  - At grafen er en ret linje når den tegnes i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem
  - Forskriften er af typen: $f(x) = ax + b$ eller: $y = ax + b$
  - Hvis ændringen i funktionsværdien (= y-værdien) er den samme, hver gang x vokser med 1 (eller 2 eller 3 ...)
- Tallene a og b kaldes parametre. For en bestemt funktion er det nogle bestemte tal.
  - b = begyndelsesværdi = $f(0)$
  - a = hældningskoefficient = ændringen, når x vokser med én.
  - Når du skal forklare, hvad parametrene betyder i en bestemt opgave, er det ikke nok at skrive "begyndelsesværdi" eller "hældningskoefficient". Forklaringen skal beskrive formue, temperatur, tryk, befolkningstal – eller hvad opgaven handler om.
- Beregning af parametre
  - $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
  - $b = y_1 - ax_1$ eller $b = y_2 - ax_2$
- Noter, hvorledes du finder parametre med GeoGebra. Bemærk, at kender du flere end 2 punkter, skal du benytte lineær regression.
- Det er ofte klogt at lave en tabel med punkter, grafen går igennem. Præciser, hvad der er x_1 osv. Og kontroller, hvad opgaven kalder x og y.
- Ligningen $f(x) = k$ har løsningen: $x = (k – b)/a$
- Sammenhængen mellem x- og y-værdier

x	0	1	2			
$f(x)$	b	$b+a$	$(b+a)+a$			

- **Ligefrem proportionalitet** er en lineær funktion, hvor $b = 0$

Den eksponentielle funktion

- Kendetegn
  - Navnet ”Den eksponentielle funktion”
  - At grafen er en ret linje, når den tegnes i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem
  - Forskriften er af typen: $f(x) = b a^x$
  - Hvis ændringen i funktionsværdien (= y-værdien) er den samme procent af y-værdien, hver gang x vokser med 1 (eller 2 eller 3 ...)
  - Hvis næste funktionsværdi (for en x-værdi der er 1 (én) større end den nuværende) fås ved at gange med den samme vækstfaktor: a eller $1+r$
- Tallene a og b kaldes parametre. For en bestemt funktion er det nogle bestemte tal.
  - b = begyndelsesværdi = $f(0)$
  - a = vækstfaktor
    - $a > 1$ medfører, at f er en voksende funktion
    - $0 < a < 1$ medfører, at f er en aftagende funktion
    - $b > 0$
    - $f(x) > 0$
- Beregning af parametre
  - $a = \sqrt[(x_2 - x_1)]{\frac{y_2}{y_1}}$ og $b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$
  - Noter, hvorledes du finder parametre med GeoGebra.
- Fordoblingskonstant (for voksende funktioner)
  - $T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$ (eller ved aflæsning: $x_2 - x_1$)
- Halveringskonstant (for aftagende funktioner)
  - $T_{1/2} = \frac{\log(1/2)}{\log(a)}$ (eller ved aflæsning: $x_2 - x_1$)
- Løsning af ligningen $f(x) = k$ har løsningen:
  - $x = \frac{\log\left(\frac{k}{b}\right)}{\log(a)}$
- Sammenhængen mellem x- og y-værdier

x	0	1	2			
$f(x)$	b	$b \cdot a$	$(b \cdot a) \cdot a$			

Rentesregning

- Variable
  - Startkapital = K_0
  - Slutkapital = K_n -
  - Rentesatsen pr. termin = r
  - Antallet af terminer = n
- $K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$
- $K_0 = \dfrac{K_n}{(1+r)^n}$
- $r = \sqrt[n]{\dfrac{K_n}{K_0}} - 1$
- $n = \dfrac{\log\left(\dfrac{K_n}{K_0}\right)}{\log(1+r)}$

Potensfunktionen

- Kendetegn
  - Navnet "Potensfunktionen"
  - At grafen er en ret linje når den tegnes i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem
  - Forskriften: $f(x) = b \cdot x^a$
  - Hvis en bestemt procentvis ændring af den ene variabel altid medfører en bestemt procentvis ændring af den anden variabel
- Tallene a og b kaldes parametre. For en bestemt funktion er det nogle bestemte tal.
  - b = begyndelsesværdi = $f(1)$ Bemærk: anderledes! DM = R_+
  - a afgør funktionens vækst:
    - $a > 0$ medfører, at f er en voksende funktion
    - $a < 0$ medfører, at f er en aftagende funktion
- Beregning af parametre
  - $a = \dfrac{\log\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)}$
  - $b = \dfrac{y_1}{{x_1}^a}$
  - Noter, hvorledes du finder parametre med GeoGebra. Skl du finde parameteren a uden hjælpemidler, skal du skrive brøkerne som potenser af primfaktorer og benytte logaritmereglen for en potens. Så vil du normalt kunne finde svaret ved en enkel forkortning.
- Løsning af ligningen $f(x) = k$ har løsningen:
  - $x = \sqrt[a]{\dfrac{k}{b}}$
- Vækstfaktorer eller sammenhæng mellem vækst
  - Antag: x vokser med faktoren k
    - Hvis x vokser med p %, er $k = 1+p$ %
  - y vokser så med faktoren k^a
    - Det svarer til, at y vokser med $(k^a - 1) \cdot 100\%$

Statistik

En **observation** er resultatet eller svaret på en undersøgelse – ofte et tal. Symbolsk skrives det ofte x_i, hvor i står for et eller andet nummer 1, 2, 3 ... og x_i så er værdien af den i'te observation.

Et **observationssæt** er alle de samhørende tal: $\{x_1 ; x_2 ; x_3 ; \ldots x_n\}$

Observationssættets størrelse (n) er antallet af observationer; ofte gives de enkelte observationer numre fra 1 til n som ovenfor.

Observationerne kan antage en række mulige værdier; for hver af disse kan vi opgøre, hvor mange af vore observationer, der er lig med denne værdi. Dette er **hyppigheden** (af denne værdi.)

Hyppigheden (h) omregnes ofte til en **frekvens** (f) således:

$$f=\frac{h}{n}$$

Det normale er at angive brøken som decimalbrøk med 2 eller 3 cifre efter kommaet.

Frekvensen kan også angives i procent:

$$f=\frac{h}{n}\cdot 100 \quad \%$$

Middeltallet

$$\bar{x}=\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)}{n}=\frac{\sum x_i}{n}$$

Typetallet er den hyppigste observation

Medianen er den midterste observation, når observationerne er ordnet efter størrelse. Er der to i midten (når n er lige), benyttes middeltallet af disse to.

Nedre kvartil findes som medianen men kun i den første halvdel af observationerne (sorteret i voksende rækkefølge.) Ved ulige antal ses der bort fra midterste observation.

Øvre kvartil findes på tilsvarende måde blandt de største observationer.

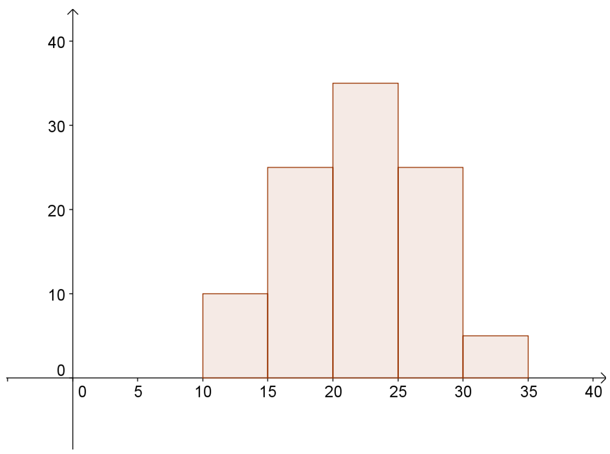
Kvartilsættet er mængden bestående af nedre kvartil (= 1. kvartil), median (= 2. kvartil) og øvre kvartil (=3. kvartil).

For **grupperede observationer** findes der tilsvarende **intervalhyppigheder**, **intervalfrekvenser** og **typeinterval**.

Diagrammer

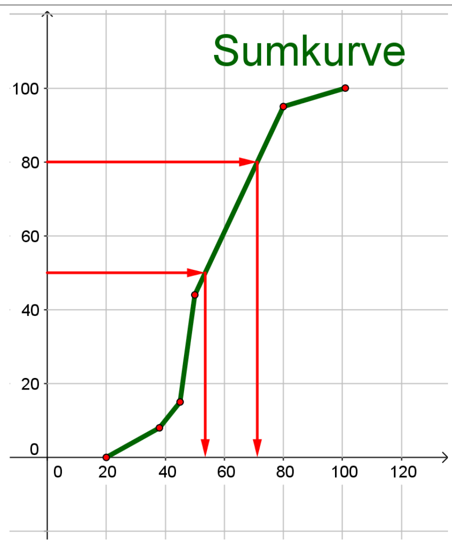
Histogrammer

har ofte – som her – intervaller med samme bredde. Søjlehøjden viser så intervalhyppighed eller -frekvens. Er intervallerne af forskellig størrelse, viser søjlens areal intervalhyppigheden (eller -frekvensen.)

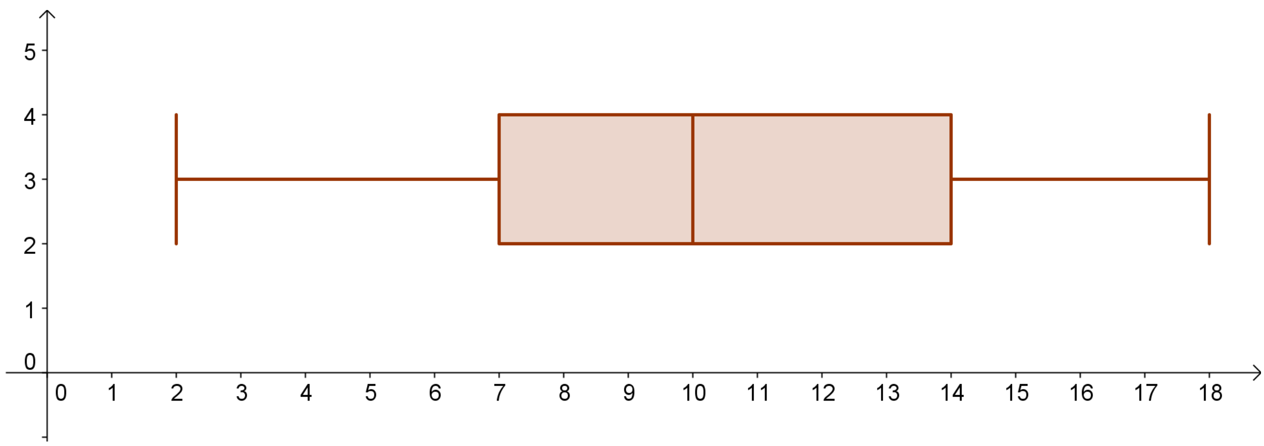


Sumkurve

hvor median, kvartilsæt og fraktiler kan aflæses
Pilen fra 50 på y-aksen viser at 2. kvartil (=medianen) er ca. 54 og den anden pil viser, at 80 procents fraktilen er ca 71.



Boksplot



På x-aksen kan aflæses, at **observationerne har** mindsteværdi (her 2), kvartilsæt (her {7,10,14}) og størsteværdi (her 18) markeret.

X^2 - Test

Population Mængde af elementer (der undersøges indirekte)

Stikprøve En delmængde af populationen (der anvendes til at skaffe viden om populationen)

Hypotese Påstand om populationen (der skal være så præcis, at der kan beregnes sandsynligheder for forskellige udfald af stikprøver)

X^2 $X^2 = \sum \frac{(O_i - F_i)^2}{F_i}$ er en stokastisk variabel der måler afstanden mellem det forventede udfald og det observerede udfald (givet hypotesen)

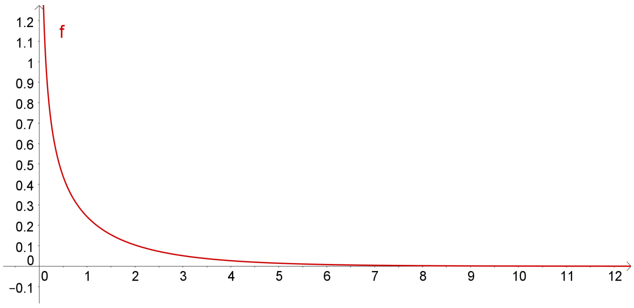
Forkast hypotesen hvis udfaldet er usandsynligt (givet hypotesen).

Signifikansniveau er en valgt grænse for, hvornår noget er usandsynligt. Almindeligvis anvendes 5 % (eller 1 %)

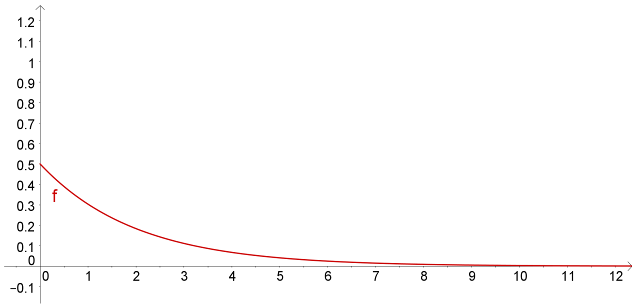
p-værdi er sandsynligheden for at få det observerede resultat eller et endnu mere ekstremt resultat

frihedsgrader antal observationer, der skal kendes, før resten kan bestemmes (medd givne randbetingelser)

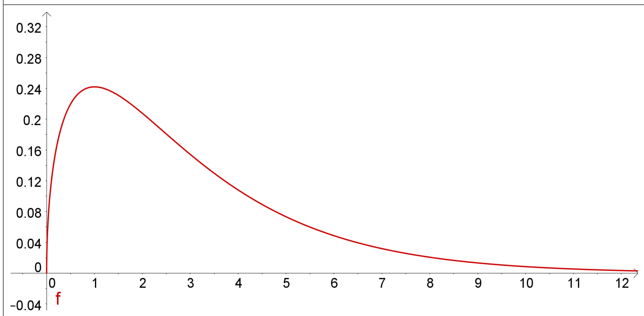
Tæthedsfunktioner med hhv. 1, 2, 3og 6 frihedsgrader



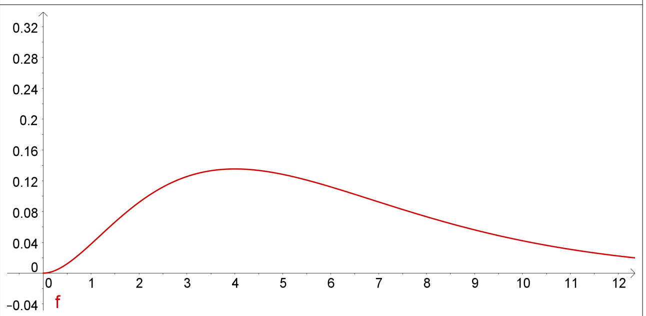
1 frihedsgrad



2 frihedgrader

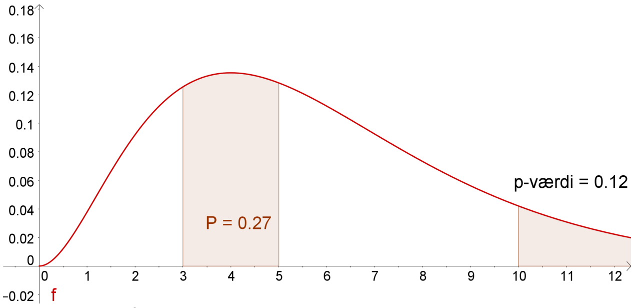


3 frihedsgrader



6 frihedsgrader

Tæthedsfunktionen kan sammenlignes med histogrammet, hvor arealet mellem graf og akse over et givet interval svarer til sandsynligheden for udfald i dette interval.

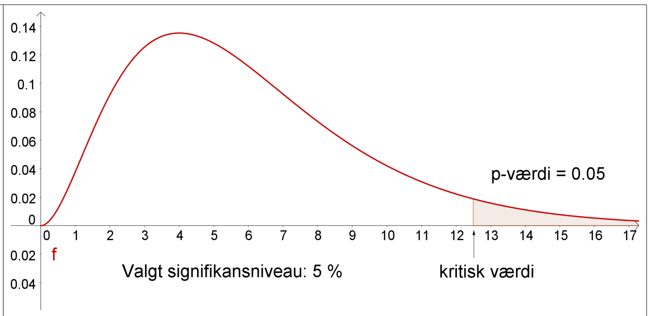


$P(3 \leq X^2 \leq 5) = P = 0{,}27$

Hvis observationerne medfører, at

$X^2 = 10$, beregnes p-værdien som:

$p - værdi = P(10 \leq X^2) = 0{,}12$



Kritisk værdi er teststørrelsen, hvor man begynder at forkaste hypotesen