

Euklid



Ib Michelsen: *Matematik C*, Geometri 2011 , Euklid

Version 7.2

03-10-11

G:_nyBog\1-3-euklid\nyEuclid4.odt

Sidetal starter med 65

Indledning

"Matematikeren Euklid levede og virkede omtrent 300 aar før Chr. i Alexandria, som den gang var Midtpunktet for Grækernes aandelige Liv, og hvor lærelystne Ynglinge samledes fra de mange Egne, hvor det græske Folk havde nedsat sig. Han har givet yderst værdifulde Bidrag til sit Fags videre Udvikling; men frem for alt mindes han som den, der har samlet sin tids elementære Mathematik til en sammenhængende Lærebygning. Det er denne, som indeholdes i hans af 13 Bøger bestående Værk: Euklids Elementer."

Dette er begyndelsen af prof. Zeuthens indledning til Thyra Eibes oversættelse (fra græsk til dansk) af Euklids Elementer. Hendes grundlag var J. L. Heibergs (og H. Menges) udgave fra 1880'erne, en udgave samlet fra mange kilder, bearbejdet og suppleret med en lettere tilgængelig oversættelse på latin.

Thyra Eibes bog "Euklids Elementer I – II" findes nu på Internettet (http://www.archive.org/stream/euklidselemente00euclgoog/euklidselemente00euclgoog_djvu.txt), men for at se den fulde tekst henvises til J.L. Heiberg: *EUCLID'S ELEMENTS OF GEOMETRY* (Græsk tekst, oversat til engelsk af Richard Fitzpatrick) på hjemmesiden <http://farside.ph.utexas.edu/euclid/Elements.pdf> og til D. E Joyce *Euclid's Elements*: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>¹

Selvom den klassiske græske kultur har passeret Zenith, og Athen ikke længere er det rige, kulturelle centrum, er det 3. århundrede (før vor tidsregnings begyndelse) en periode, hvor matematikken udvikler sig: ikke mindst i Alexandria, hvor også Aristarchos og Eratosthenes og Apollonius fra Perga virkede.

Vi ved meget lidt om Euklid og kender kun hans "bøger" gennem afskrifter af afskrifter med al den usikkerhed det giver, fra kommentarer og henvisninger i andre værker og ved at sammenligne og sammendrage forskellige kilder. Men han får æren for matematikkens udvikling til et aksiomatisk opbygget deduktivt system. Han begynder sit værk med at definere *begreber* (se nedenfor), opstille *forudsætninger* (postulater, grundlæggende sætninger eller aksiomer) samt *almindelige begreber* (slutningsregler om størrelser, aksiomer). Herefter bevises sætning efter sætning på dette grundlag - dog efterhånden suppleret med de beviste sætninger og senere indførte definitioner.

Når man beviser sætninger er det vigtigt, at man ikke laver "cirkelslutninger". Det forhindrer Euklids metode: Man kan kun bevise nye sætninger med sætninger, der allerede er bevist eller er en del af grundlaget for teorien. Når man som læser kun ser nogle udvalgte sætninger og beviset for dem, er det nødvendigt at bemærke, hvor i rækkefølgen af sætninger, de dukker op. Ellers risikerer vi at bevise sætning *m* med sætning *n*, som først

¹ Se Kilder side 91

Euklid

senere bevises direkte eller indirekte med sætning m . Det ville være en cirkelslutning.

I dette kapitel henviser sætningsnumre som fx VI.12 til Euklids nummerering: Altså i eksemplet bog 6, sætning 12.

Konstruktioner

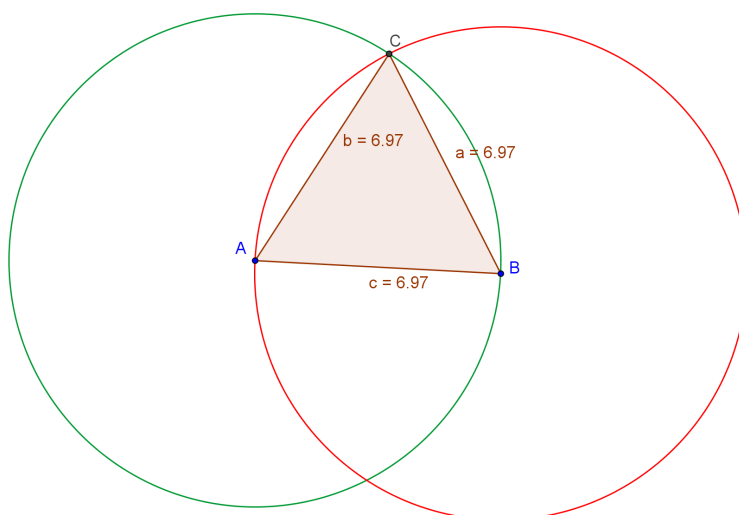
Klassiske konstruktioner udføres alene med passer og lineal (uden målestok.) De følgende øvelser udføres med programmet GeoGebra (eller tilsvarende programmer.) Formålet er tredobbelt: du skal lære at kende programmet, at forstå, hvad de omtalte begreber dækker over og du skal lære at udføre konstruktionerne. På et senere tidspunkt skal konstruktionernes rigtighed også bevises.

En ligesidet trekant

Lad der være givet to punkter A og B i planen. Du skal konstruere en trekant, hvor linjestykket AB er den ene side, og hvor de to andre sider har samme længde som AB .

Tegn cirklen med A som centrum og $|AB|$ som radius; tegn cirklen med B som centrum og $|BA|$ som radius. Lad C være et af cirklernes skæringspunkter: tegn så linjestykkerne AC og BC .

$\triangle ABC$ er den ligesidede trekant. □



- ◆ Lad GeoGebra vise sidelængderne på tegningen
- ◆ Flyt figuren i planen (med musen): noter, hvad der ændres
- ◆ Flyt A eller B og noter, hvad der ændres
- ◆ Hvilken forskel gør det, om et punkt er markeret med blå eller sort farve?

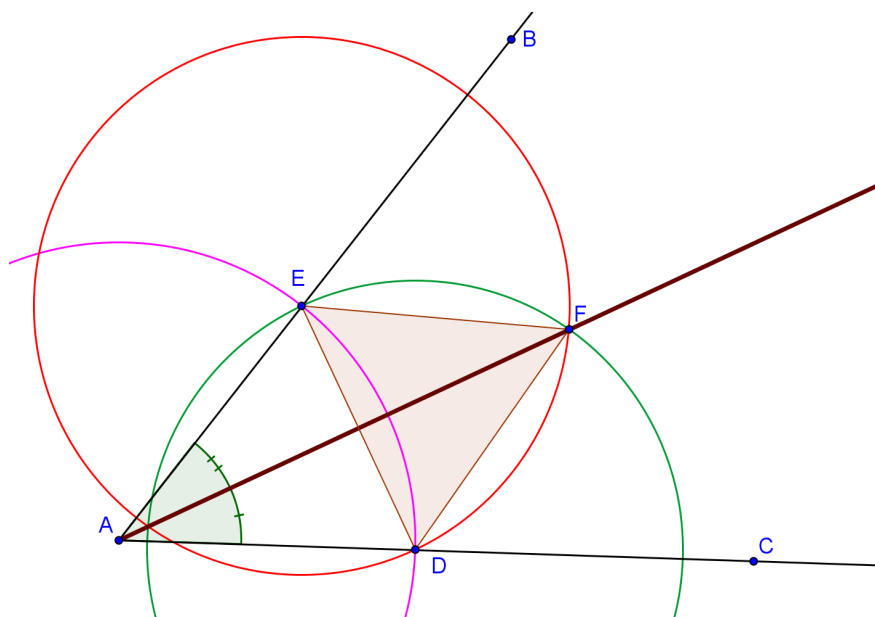
Vinkelhalveringslinjen

Lad der være givet en vinkel med spids i punktet A og yderligere bestemt af punkterne B og C beliggende på hver sit vinkelben. Du skal konstruere en linje (halvlinje), der deler vinklen i to lige store vinkler.

På det ene vinkelben vælges et vilkårligt punkt D . Tegn cirklen med A som centrum og $|AD|$ som radius. Denne skærer det andet vinkelben i E . Konstruer så den ligesidede $\triangle DEF$.

Linjen gennem A og F er vinkelhalveringslinjen.. □

- ◆ Lad GeoGebra vise størrelser på $\angle DAF$ og $\angle FAE$.
- ◆ Eksperimenter med at flytte på punkterne, der bestemmer halvlinjerne.
- ◆ Hvad er virkningen?
- ◆ Skriv navne på tegningen: Vinkelspids, venstre vinkelben, højre vinkelben, vinkelhalveringslinjen
- ◆ Lad GeoGebra vælge den rigtige overskrift: Spids, ret, stump eller lige vinkel



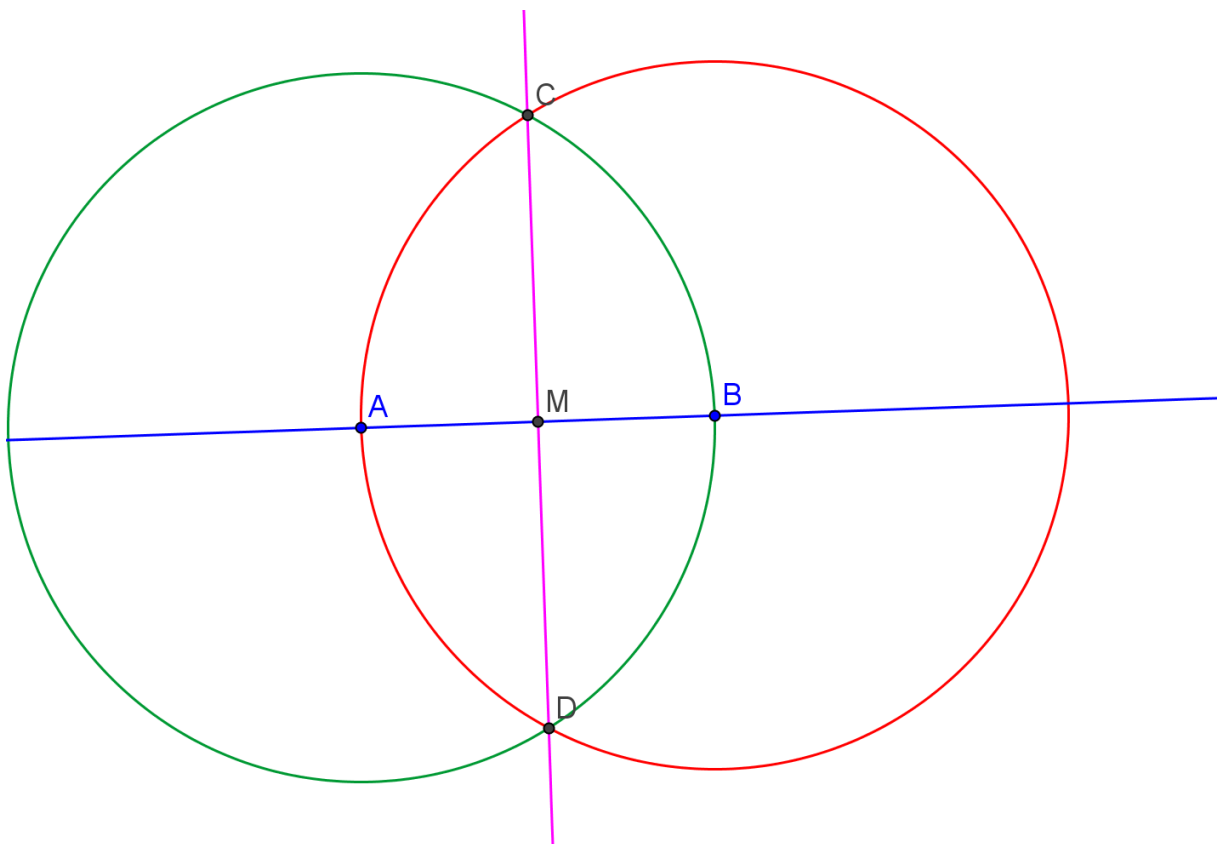
Halvering af et linjestykke

Tegn to punkter A og B i planen. Du skal konstruere et punkt M på linjestykket AB , så $|AM| = |MB|$.

Tegn en cirkel med A som centrum og $|AB|$ som radius samt en cirkel med B som centrum og $|BA|$ som radius. Disse cirkler skærer hinanden i punkterne C og D . Linjen gennem C og D tegnes.

Skæringspunktet mellem denne linje og linjen gennem A og B er midtpunktet M . $\square$

- ◆ Lad GeoGebra beregne længderne af linjestykkerne AM og MB .
- ◆ Flyt punkterne A og B : ét af dem eller dem begge. Bemærk, hvad længderne af AM og MB er.
- ◆ Kunne man sige mere om linjen gennem C og D end at den skærer AB i midtpunktet M ?



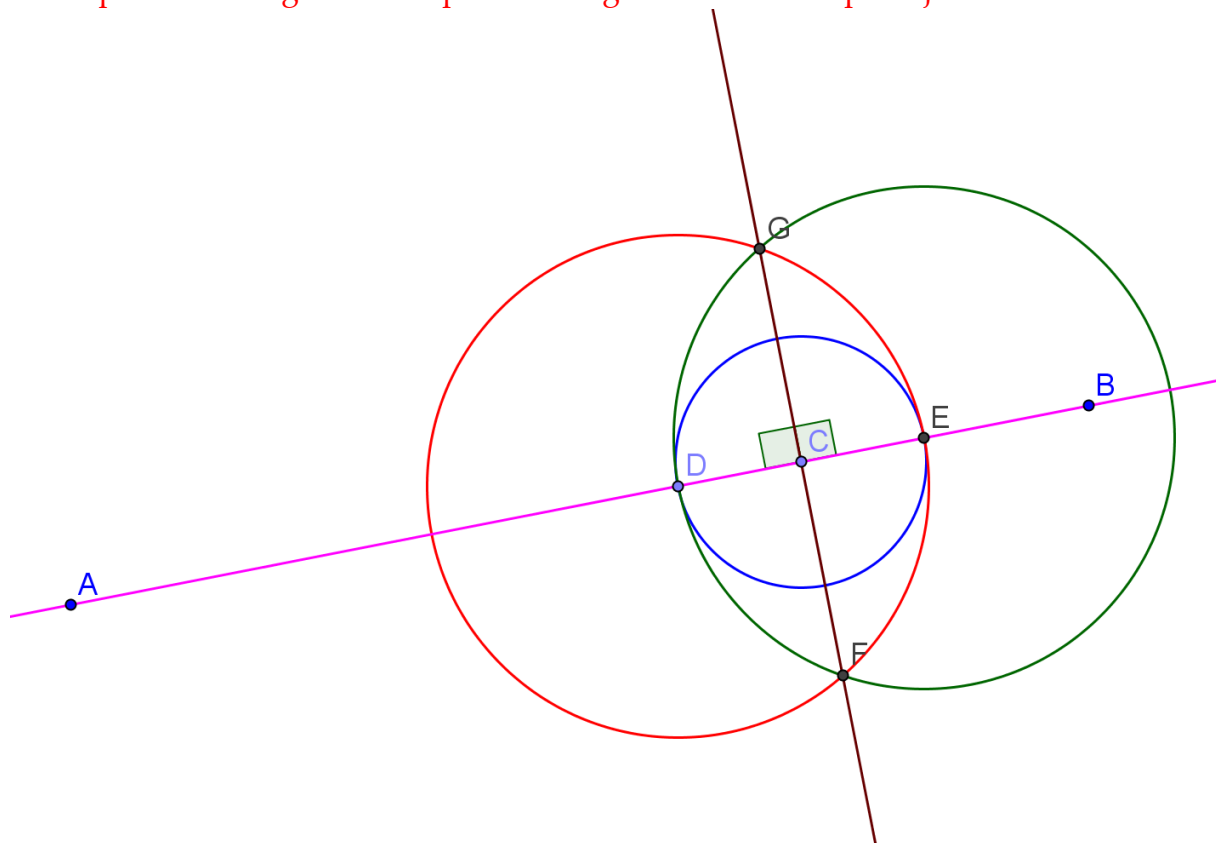
At oprejse den vinkelrette

Tegn to punkter A og B i planen. Tegn den rette linje gennem punkterne. Tegn et punkt C et vilkårligt sted på linjen. Du skal konstruere en linje gennem C , der står vinkelret på linjen gennem A og B .

D vælges som et vilkårligt punkt på linjen gennem A og B , men forskelligt fra C . Tegn en cirkel med C som centrum og $|CD|$ som radius. Denne skærer linjen i D og E . Tegn en cirkel med E som centrum og $|ED|$ som radius samt en cirkel med D som centrum og $|DE|$ som radius. Disse cirkler skærer hinanden i punkterne F og G . Linjen gennem F og G tegnes.

Denne linje går gennem C og står vinkelret på linjen gennem A og B . □

- ◆ Eksperimenter med at flytte punkterne A og / eller B .
- ◆ Eksperimenter også med at placere D og C andre steder på linjen.



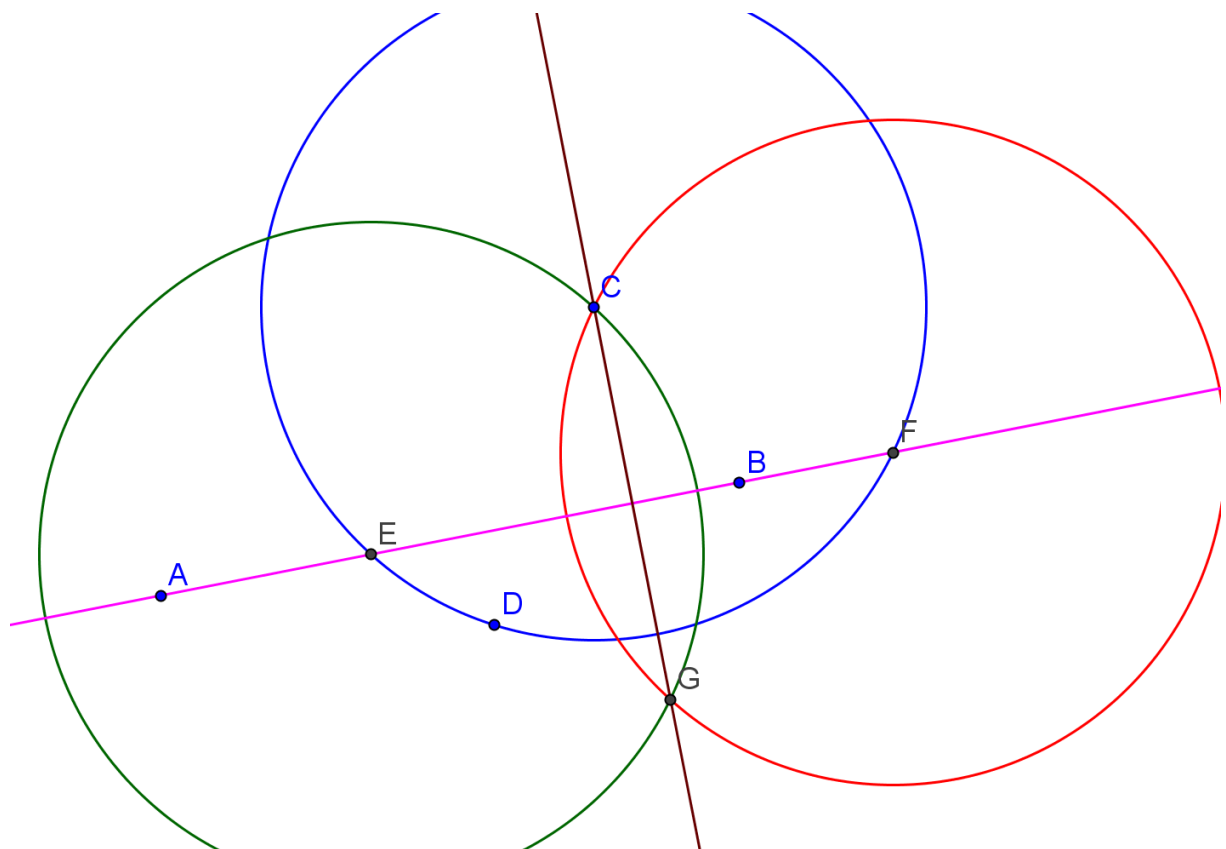
At nedfælde den vinkelrette

Tegn to punkter A og B i planen. Tegn den rette linje gennem punkterne. Tegn et punkt C et vilkårligt sted udenfor linjen. Du skal konstruere en linje gennem C , der står vinkelret på linjen gennem A og B .

D vælges som et vilkårligt punkt på i halvplanen, der ikke indeholder C . Tegn en cirkel med C som centrum og $|CD|$ som radius. Denne skærer linjen i E og F . Tegn en cirkel med E som centrum og $|EC|$ som radius samt en cirkel med F som centrum og $|FC|$ som radius. Disse cirkler skærer hinanden i punkterne C og G . Linjen gennem C og G tegnes.

Denne linje går gennem C og står vinkelret på linjen gennem A og B . □

- ◆ Eksperimenter med at flytte punkterne A og / eller B .
- ◆ Eksperimenter også med at placere D og C andre steder på linjen.



Euklids Elementer

På de følgende 2 sider følger indledningen til 1. bog startende med definitioner. Gengivelsen stammer fra Thyra Eibes oversættelse.

Definitioner

1. Et Punkt er det, som ikke kan deles.
2. En Linie er en Længde uden Bredde.
3. En Linies Grænser er Punkter.
4. En ret Linie er en Linie, som ligger lige mellem Punkterne paa den.
5. En Flade er det, som kun har Længde og Bredde.
6. En Flades grænser er linier.
7. En plan Flade er en Flade, som ligger lige mellem de rette linier i den.
8. En plan Vinkel er Hældningen mellem to linier, som ligge i samme plan, have et punkt fælles og ikke ligge på ret linie.
9. Naar de Linier, der indeslutte vinklen ere rette, kaldes vinklen retlinet.
10. Naar en ret Linie er oprejst paa en anden, saa at de ved siden af hinanden liggende vinkler blive ligestore, er enhver af de ligestore Vinkler ret; og den Linie, der er oprejst på den anden, kaldes lodret paa den anden.²
11. En stump Vinkel er en, som er større end en ret.
12. En spids vinkel er en, som er mindre end en ret.
13. Omkreds er Grænsen for noget.
14. En Figur er det, som indesluttet af en eller flere Omkredse.
15. En Cirkel er en plan Figur, indesluttet af een saadan Linie (som kaldes Periferien), at alle de rette Linier, der kunne drages ud til den fra eet indenfor Figuren liggende Punkt, ere indbyrdes ligestore.
16. Dette Punkt kaldes Centrum i Cirkelen.
17. En Diameter i Cirkelen er en ret Linie, trukken gennem Centrum og begrænset til begge Sider af Cirkelperiferien; den halverer også cirkelen.

² Nutidig sprogbrug erstatter "lodret på den anden" med "en normal".

18. En Halvcirkel er en Figur, som indesluttet af en Diameter og den af Diameteren afskaarne Periferi. Halvcirkelens centrum er det samme som Cirkelens.
19. Retlinede Figurer ere saadanne, som indesluttet af rette Linier: tresidede, som indesluttet af tre, firsidede af fire, flersidede af flere end fire rette Linier.
20. Af tresidede Figurer kaldes den, der har alle sider ligestore, en ligesidet, som kun har to Sider ligestore, en ligebenet, og den som har alle tre sider uligestore, en skæv Trekant.
21. Af tresidede figurer kaldes endvidere den, som har en ret Vinkel, en retvinklet, den som har en stump Vinkel, en stumpvinklet, den, som har alle tre Vinkler spidse, en spidsvinklet Trekant.
22. Af firsidede Figurer kaldes den, som både er ligesidet og retvinklet, et Kvadrat, den, som er retvinklet, men ikke ligesidet, et Rektangel, den som er ligesidet, men ikke retvinklet, en Rhombe, den som har både modstående Sider og Vinkler ligestore, men hverken er ligesidet eller retvinklet, en Rhomboide; de øvrige Firsider kunne kaldes Trapezer.³
23. Parallele ere de rette Linier, som ligge i samme Plan og, naar de forlænges ubegrænset til begge sider, ikke mødes til nogen af siderne.

Forudsætninger

Lad det være forudsat:

1. At man kan trække en ret Linie fra et hvilkensomhelst Punkt til et hvilkensomhelst Punkt.
2. At man kan forlænge en begrænset ret Linie i ret Linie ud i eet.
3. At man kan tegne en Cirkel med et hvilkensomhelst Centrum og en hvilkensomhelst Radius.
4. At alle rette Vinkler ere ligestore.
5. At, naar en ret Linie skærer 2 rette Linier, og de indvendige vinkler på samme side ere mindre end to rette, saa mødes de to Linier, naar de folænges ubegrænset, paa den side, hvor de to vinkler ligge, der ere mindre end to rette.

Almindelige Begreber

1. Størrelser, som ere ligestore med samme den samme, ere indbyrdes ligestore.
2. Naar ligestore Størrelser lægges til ligestore Størrelser, ere Summerne ligestore.

³ Nutidig sprogbrug definerer et *trapez* som en firkant, hvor to sider er parallelle.

3. Naar ligestore Størrelser trækkes fra ligestore Størrelser, ere Resterne ligestore.
4. Størrelser, der kunne dække hverandre, ere indbyrdes ligestore.
5. Det hele er større end en Del af det.

Beviser

Sætning I.1

Euklids første sætning handler om konstruktionen af den ligesidede trekant, se side 69. Sætningen siger:

Givet linjestykket AB . Tegn cirklen med A som centrum og $|AB|$ som radius; tegn cirklen med B som centrum og $|BA|$ som radius. Lad C være et af cirklernes skæringspunkter: tegn så linjestykkerne AC og BC .
 $\triangle ABC$ er den ligesidede trekant.

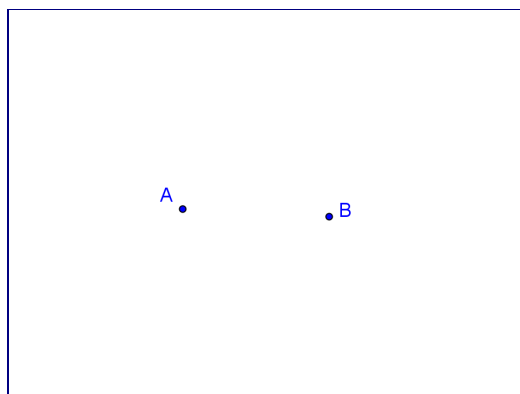
Tilbage står at bevise, at påstanden er rigtig i alle tilfælde.

Beviset

Figur I

Der er givet de to punkter:

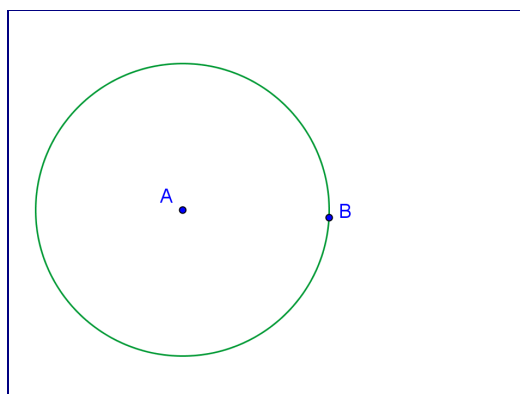
A og B



Figur II

Lad cirklen (grøn) være tegnet med A som centrum og $|AB|$ som radius.

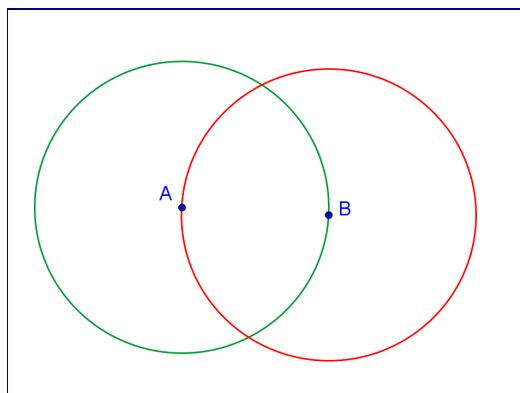
Cirklen kan tegnes ifølge Forudsætning 3.



Figur III

Lad cirklen (rød) være tegnet med B som centrum og $|BA|$ som radius.

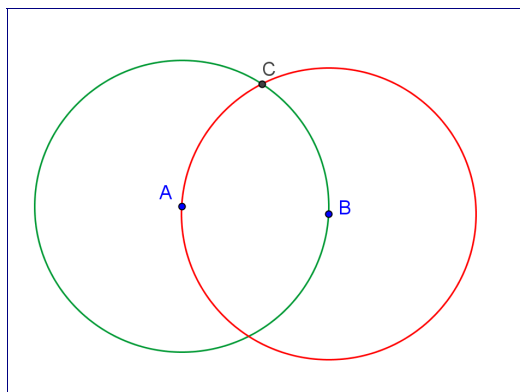
Cirklen kan tegnes ifølge Forudsætning 3.



Figur IV

C er cirklernes skæringspunkt.

(At der faktisk er 2 skæringspunkter ændrer ikke beviset; den samme argumentation kan benyttes uanset hvilket af punkterne, der vælges.)



Figur V

Punkterne forbindes med linjestykker.

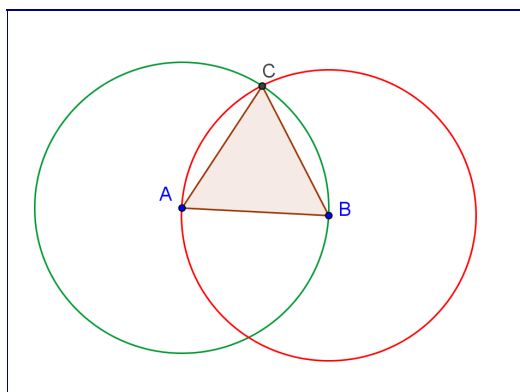
Linjestykkerne kan tegnes ifølge Forudsætning 1

$|AC| = |AB|$ ifølge Definition 15

$|BC| = |BA|$ ifølge Definition 15

$|AC| = |BC|$ ifølge Almindelige Begreber 1

$\triangle ABC$ er en ligesidet trekant ifølge Definition 20

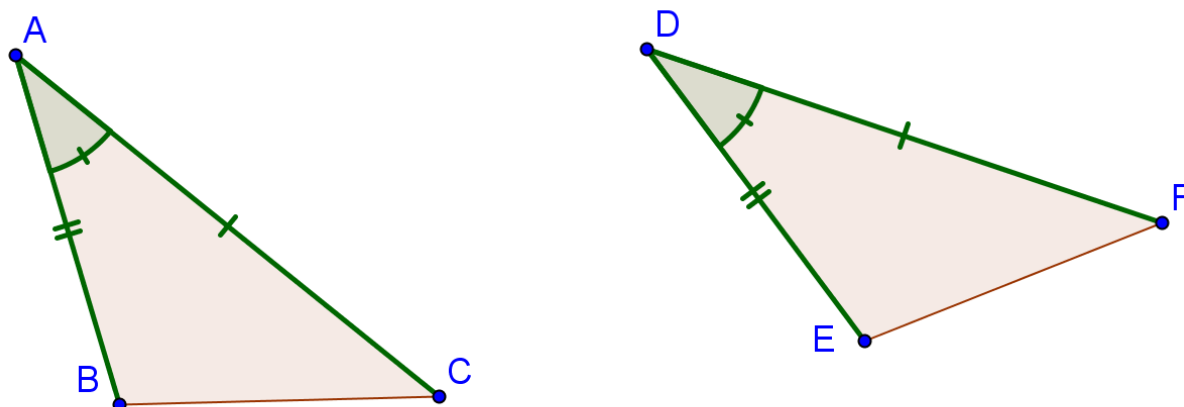


□

Sætning I.4

Når to trekanter har to sider parvis lige store og også vinklen mellem disse sider er ens i de to trekanter, da vil også grundlinjerne være lige store, trekanterne vil være lige store og vinklerne overfor de lige store sider vil være parvis lige store.

Bevis



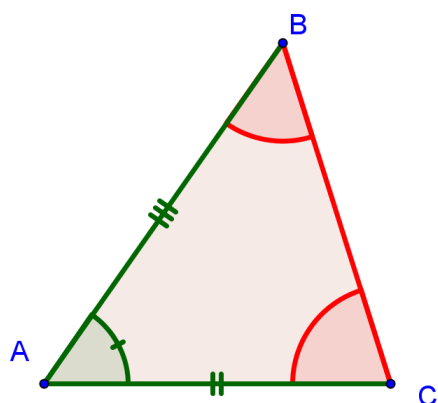
Når $\triangle ABC$ lægges på $\triangle DEF$ med punktet A på D og med det rette linjestykke AB på DE , vil punktet B træffe punktet E , fordi $|AB| = |DE|$.

Men så vil også AC falde på DF , fordi $\angle BAC = \angle EDF$, og punkt C vil træffe F , fordi $|AC| = |DF|$.

Heraf følger, at linjestykket BC dækker linjestykket EF og derfor er de ens. (ifølge Almindelige Begreber 4).

Af samme grund er de to trekanter ens og tilsvarende gælder for de to vinkler.

Kongruens

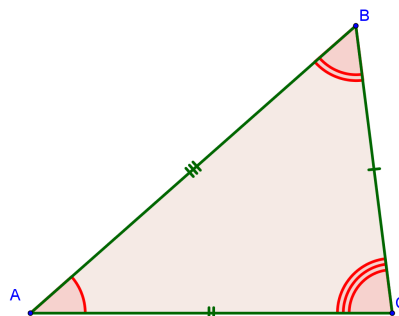


Kongruente trekanter er trekanter, der kan dække hinanden og hvor trekanterne parvis har samme sidelængder, parvis har samme vinkelstørrelser og har samme areal. Det er ikke et begreb, Euklid anvender, men sætningen I.4 angiver et eksempel (SVS) på tilstrækkelige betingelser for kongruens. Tegningen til venstre viser én af to kongruente trekanter, hvor de størrelser, der skal

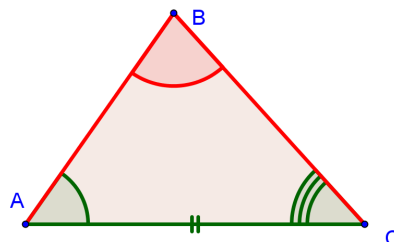
Euklid

være ens, er farvet grønne.

I sætning I.8 anføres et andet eksempel (SSS) på tilstrækkelige betingelser for kongruens: når to sider parvis er ens og grundlinjerne også er ens. På tegningen til højre er de størrelser, der skal være ens, farvet grønne.



I sætning I.26 anføres et tredje eksempel (VSV / VVS) på tilstrækkelige betingelser for kongruens: når to vinkler parvis er ens og en side er lig med en side: enten en side, der ligger mellem vinkelspidserne eller en side, der ligger overfor en af de lige store vinkler.



Opgaver

Renskriv beviser efter samme model som eksemplet med den ligesidede trekant (se side 77) for de andre konstruktions-sætninger (side 69 og følgende):

- Vinkelhalveringslinjen
 - Hertil benyttes bl. a. sætningerne I.1, I.3, I.8
 - Benyt <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI9.html>
- Halvering af et linjestykke
 - Hertil benyttes bl. a. sætningerne I.1, I.4, I.9
 - Benyt <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI10.html>
- At oprejse den vinkelrette
 - Hertil benyttes bl. a. sætningerne I.1, I.3, I.8
 - Benyt <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI11.html>

- At nedfælde den vinkelrette
 - Hertil benyttes bl. a. sætningerne I.8, I.10
 - Benyt <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI12.html>

Et overblik over alle sætninger i Bog I fås her:

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/bookI.html>

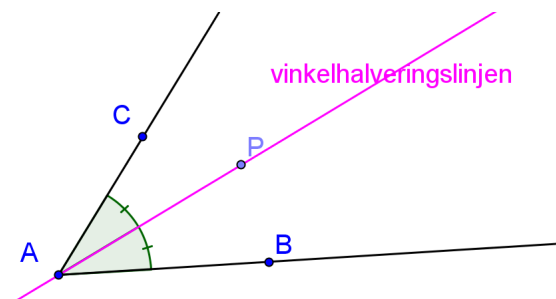
Opgaver

1.

Lad der være givet en vinkel BAC og dens vinkelhalveringslinje. P er et vilkårligt punkt på vinkelhalveringslinjen.

Bevis, at afstandene fra P til hver af linjerne AB og AC er lige store.

Formuler resultatet som en sætning.

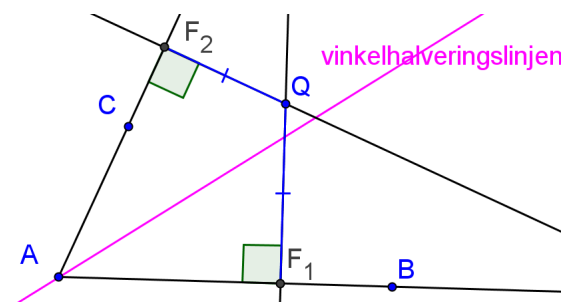


2.

Lad der være givet en vinkel BAC og et punkt Q , for hvilket afstandene fra Q til hver af linjerne AB og AC er lige store. Det vil sige: $|QF_1| = |QF_2|$. Punkterne F_1 og F_2 benævnes ofte "fodpunkter".

Bevis, at Q ligger på vinkelhalveringslinjen.

Formuler resultatet som en sætning.



Note:

Vinkelhalveringslinjen er et eksempel på et "geometrisk sted"; dvs. en punktmængde, der opfylder en nærmere beskrevet betingelse.

3.

Lad der være givet et linjestykke, som er halveret – jævnfør konstruktionen side 71. Vis, at linjen CD står vinkelret på AB .

4.

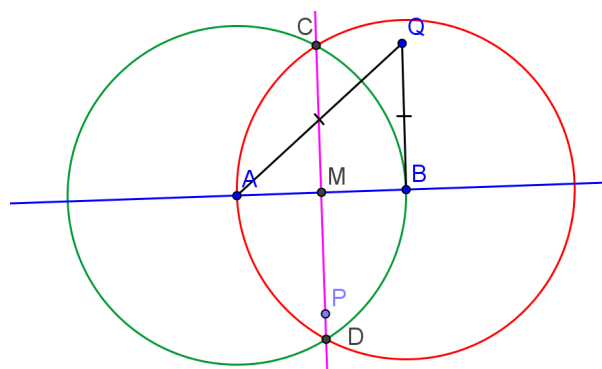
Lad der være givet et vilkårlig punkt P på CD . Bevis, at $|PA| = |PB|$.

5.

Lad der være givet et vilkårligt punkt Q , hvor $|QA| = |QB|$. Bevis, at Q ligger på linjen CD .

Note:

Også midtnormalen er et geometrisk sted.



Andre sætninger

Sætning IV.4 (Den indskrevne cirkel)

Givet en vilkårlig trekant ABC . Tegn **vinkelhalveringslinjerne til to af vinklerne**. Lad skæringspunktet være O . **Nedfæld den vinkelrette fra O til én af siderne**. Lad F være skæringspunktet mellem siden og den vinkelrette: tegn så **cirklen med centrum O og radius OF** . Denne cirkel er **trekantens indskrevne cirkel**.

Bevis

Vinkelhalveringslinjerne kan tegnes ifølge sætning I.9 (se metode side 70). Skæringspunktet er O .

Den vinkelrette kan nedfældes ifølge sætning I.12 (se metode side 73)

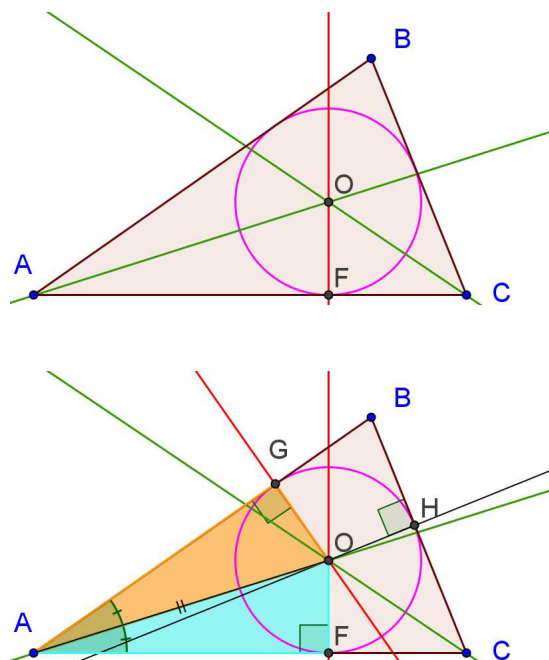
For at vise, at O har samme afstand til alle sider, nedfældes den vinkelrette til en af de andre sider.

Ved sammenligning af trekantene AOF og AOG ses, at trekantene er kongruente, da de har to vinkler ens og en fælles side (AO). Jævnfør sætning I.26 (se side 80). Derfor er $|OF| = |OG|$.

Tilsvarende ses, at afstanden til den tredje side også er den samme: $|OF| = |OH|$. Ifølge Almindelige Begreber 1 er alle linjestykkerne lige lange.

Derfor vil G og H også ligge på **cirkelperiferien**. (Jævnfør definitionen I.Def.15)

Ifølge III.16 vil en linje, der står vinkelret på en diameter, falde udenfor cirklen. Derfor vil **cirklen med centrum i O** og radius OF ikke skære trekantens sider. Derfor tangerer cirklen siderne og er **den indskrevne cirkel**. (Jævnfør definitionen IV.Def.5) $\square$



Øvelse

Overvej, om du havde fået den samme løsning (dvs. samme indskrevne cirkel), hvis du havde konstrueret cirklen ved at tegne et andet par af vinkelhalveringslinjer? ⁴

En ekstra overvejelse: hvordan ved man, at vinkelhalveringslinjerne skærer hinanden?

Sætning IV.5 (Den omskrevne cirkel)

Givet en vilkårlig trekant ABC . Tegn **midtnormalerne til to af siderne**. Lad skæringspunktet være O . Tegn **linjestykkerne fra O til hver af vinkelspidserne**. Tegn så **cirklen med centrum O og radius OA** .

Denne cirkel er **trekantens omskrevne cirkel**.

Bevis

Tegn **midtnormalerne** – hvilket kan gøres direkte eller som hos Euklid følge sætning I. 10 og I.11.

Skæringspunktet er O .

Det ses nemt at trekanterne ODA og ODB er kongruente, jævnfør sætning I.4.

Derfor gælder $|OA| = |OB|$.

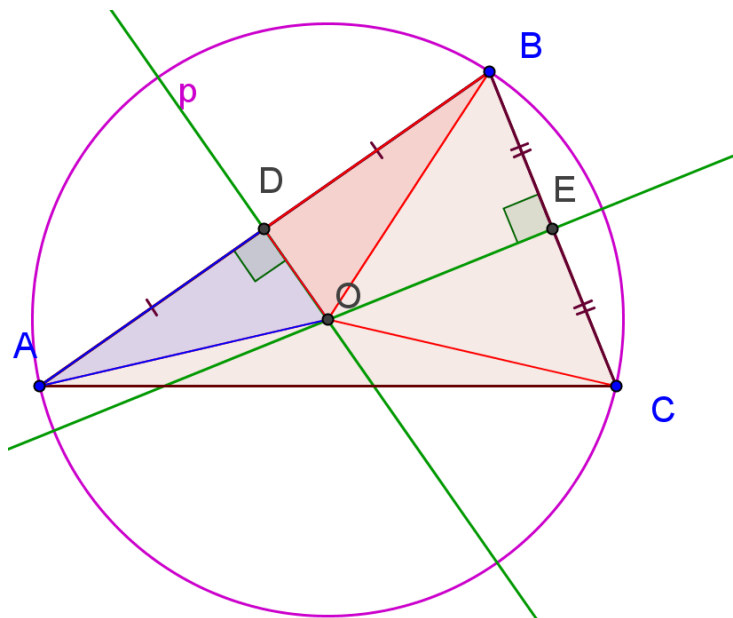
Tilsvarende fås: $|OB| = |OC|$.

Det vil sige, at afstandene fra O til alle tre vinkelspidser er ens, jævnfør Almindelige Begreber 1.

Derfor er den tegnede cirkel **den omskrevne cirkel**: se definitionen

IV.Def.6

□



⁴ Modstridsbevis: Hvis der med den tredje vinkelhalveringslinje dannes et nyt skæringspunkt, må det ligge udenfor én af vinkelhalveringslinjerne. Men det er ikke muligt!

Sætning VI.12 (Fjerdeproportionalen)

Givet tre linjestykker med længderne a , b og c findes fjerdeproportionalen ved:

At tegne en tilfældigt valgt vinkel med vinkelspidsen O ,

på det ene ben at afsætte punktet A (hvor $a = |OA|$) og punktet B (hvor $b = |AB|$) og

på det andet ben at afsætte et punkt C (hvor $c = |OC|$).

Linjestykket AC tegnes og gennem B tegnes en linje parallel med AC . Denne skærer vinklens andet ben i D . $d = |CD|$ er fjerdeproportionalen, dvs.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Bevis

Punkterne A , B og C kan afsættes ifølge sætning I.3. (Observer: man kan ikke bare løfte passereren!) Ifølge Forudsætninger 1 kan punkter forbindes og ifølge sætning I.31 kan den parallelle linje tegnes.

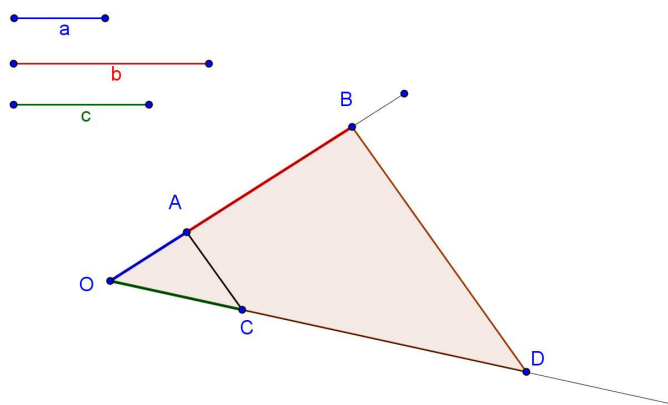
Men fordi AC og BD er parallelle, gælder

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD} \quad \text{ifølge sætning VI.2,}$$

men da $|OA| = a$, $|AB| = b$ og $|OC| = c$, fås:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad .$$

Dvs. fjerdeproportionalen er $d = |CD|$



□

Sætning VI.13 (Mellemproportionalen)

Givet to linjestykker med længderne a og b findes mellemproportionalen ved:

At tegne et tilfældigt valgt (langt) linjestykke; vælg B som punkt på linjen.

AB afsættes med længden a , BC afsættes med længden b . Halvcirklen over AC tegnes.

Den vinkelrette oprejses i B . Denne skærer halvcirklen i D . Lad $x = |DB|$. Så er x mellemproportionalen; dvs.:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Bevis

AB og BC kan afsættes ifølge sætning I.3.

Midtpunktet M findes ifølge sætning I.10.

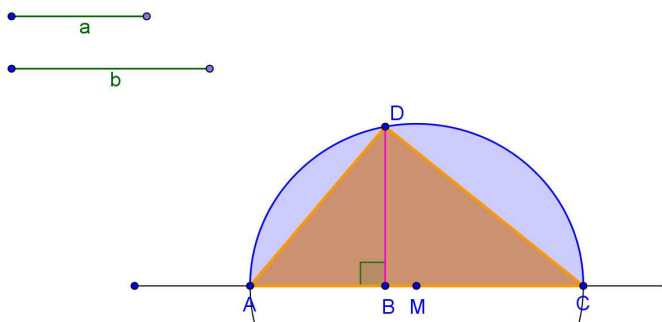
Cirklen kan tegnes ifølge Forudsætning 3.

Den vinkelrette kan oprejses ifølge sætning I.11.

Ifølge sætning III.31 er vinkel ADC ret, da det er en periferivinkel der spænder over en diameter.

Da trekant ADC er delt af DB (som står vinkelret på hypotenusen) i to trekanter, gælder ifølge sætning VI.8Cor., at x er mellemproportionalen.

(Det følger også af, at de to deltrekanter er ligedannede!)



□

Øvelser

1.

Lad $a = 5$, $b = 3$ og $c = 12$. Beregn fjerdeproportionalen (med hovedregning) og find derefter længden med en konstruktion i GeoGebra.

2.

Find på samme måde mellemproportionalen af 2 og 8 ved beregning og ved konstruktion.

3.

Find ved konstruktion med mellemproportional et linjestykke med længden $\sqrt{17}$.

4.

Givet et tilfældigt rektangel konstrueres (alene med passer og lineal – men gerne med GeoGebra) et kvadrat med samme areal.

Andre græske matematikere

Eratosthenes og Aristarchos – og noget af deres arbejde med at skabe et verdensbillede - er allerede omtalt i kapitlet om Lignedannede Trekanter.

Pythagoras – og den sætning, der bærer hans navn – er kendt af mange. Han er flere hundrede år ældre end Euclid, som medtager hans sætning som I,47 i *Elementerne*. Sætningen og anvendelser af sætningen studeres nærmere i det næste kapitel: Beviser i Trigonometri.

Apollonius fra Perga – der bl.a. er kendt for sine studier af keglesnittene – bliver lidt ufortjent kun lige nævnt her. Keglesnittene er de plane kurver, der fremkommer, når den rumlige figur keglen skæres af et plan. Afhængig af vinklen mellem keglens akse og det skærende plan kan kurven være en cirkel, en ellipse, en parabel eller en hyperbel.

Arkimedes og π

Arkimedes levede i Syrakus (287 – 212 f.v.t.) beliggende på Sicilien, som dengang var en græsk koloni. Han gjorde sig gældende på mangfoldige områder, men er også kendt som én af de store matematikere.

Bestemmelse af π

Det lykkedes for Arkimedes at bestemme π som et tal i intervallet fra $3 \frac{1}{7}$ til $3 \frac{10}{71}$. Omskrives brøkerne og π til decimaltal, ses det nemt, at afstanden mellem intervalgrænserne er 21/10.000 og at π ligger ca. midt i det angivne interval.

Metoden, Arkimedes benyttede, var at beregne tilnærmede værdier for en cirkels omkreds ved at beregne omkredse for hhv. indskrevne og omskrevne polygoner. Jo flere sider polygonerne havde jo nøjagtigere blev beregningerne.⁵

Bestemmelse af cirkelns areal

Arkimedes inddelte cirklen i trekanter, som det ses på figuren næste side. Ved at placere halvdelen på en ret linje i forlængelse af hinanden og den anden halvdel i de opståede mellemrum fås et parallelogram. Den ene sides længde (i parallelogrammet) er cirkelns radius og den anden sidelængde er omtrent cirkelns halve omkreds. Da trekantens sider er

⁵ En nærmere omtale af metoden findes på itech.fgcu.edu/faculty/clindsey/mhf4404/archimedes/archimedes.html

korder i cirklen, er sidelængden lidt mindre end cirkels halve omkreds, men hvis antallet af trekanter vokser, bliver fejlen mindre og mindre.

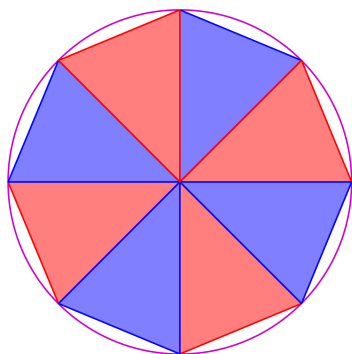


Fig. 1: Cirklen opdelt i trekanter

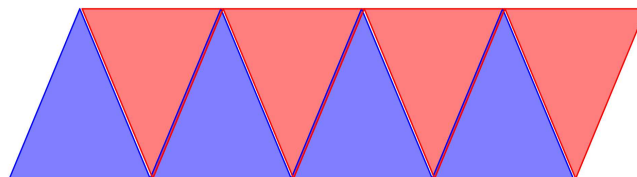


Fig. 2: Halvdelen af trekanterne foroven, halvdelen forneden

Hvis antallet af trekanter bliver meget stort, vil parallelogrammet nærme sig et rektangel. Samtidig bliver cirkels halve omkreds et mere og mere rigtigt mål for den ene sidelængde; den anden har konstant været lig med cirkels radius. Derfor fås:

$$\text{Cirkels areal} = \frac{O}{2} \cdot r = \pi \cdot r \cdot r = \pi \cdot r^2$$

hvor cirkels omkreds er $O = 2 \cdot \pi \cdot r$; r = cirkels radius.⁶

Bestemmelse af kugels areal

At cylinderen har en overflade med arealet

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h ,$$

hvor r er radius i cylinderens grundflade og h er cylinderens højde, har været nemt at indse, da den krumme flade nemt kan udfoldes til en plan flade uden deformation. Men at indse, at en kugle har samme overflade som den cylinder, kuglen netop kan være indeni, er en bedrift.

Lad mig benytte jorden som et eksempel på en kugle og lad jorden være omgivet af en cylinder, der rører jorden ved ækvator (og har sin akse fra pol til pol.)

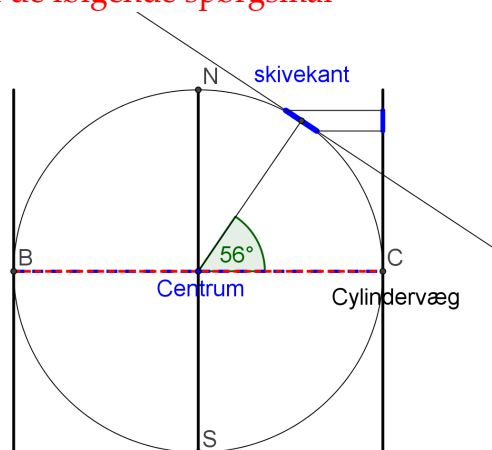
Forestil dig, at vi skærer både kugle og cylinder i tynde skiver (korte cylindere) på tværs af polaksen: Ved ækvator er det klart, at kugleskive og den korte cylinder har samme overflade. Men andre steder er cylinderens omkreds større; til gengæld er højden af cylinderen mindre.

⁶ Se viden.jp.dk/binaries/an/8401.pdf (Artikel af Steen Markvorsen)

◆ Beregn jordens omkreds ved nordlig

-
- A diagram of a cylinder. A large black circle represents the cylinder's profile. Inside, a smaller blue circle represents a latitude line. The text "Cylinder" is at the top. "Breddegrad 56" is written in blue near the top of the blue circle. "Polakse" is written in blue next to a black dot representing the axis, which is located at the center of the blue circle.

N skivekant



- Kuglen har altså overfladearealet O , hvor

90

Kilder

J.L. Heiberg: EUCLID'S ELEMENTS OF GEOMETRY (Græsk tekst), oversat til engelsk af Richard Fitzpatrick

<http://farside.ph.utexas.edu/euclid/Elements.pdf>

26-6-2011

Rudi Thomsen: "Verdenshistorie 1", Gyldendal 1963

D. E. Joyce: Euclid's Elements

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>

26-6-2011

"Euklids Elementer" oversat af cand. mag Thyra Eibe.

http://www.archive.org/stream/euklidselemente00euclgoog/euklidselemente00euclgoog_djvu.txt (Digital version)

<http://www.archive.org/stream/euklidselemente00euclgoog/euklidselemente00euclgoog#page/n7/mode/2up> (Billed version)

1-8-2011

<http://viden.jp.dk/binaries/an/8401.pdf> (Artikel af Steen Markvorsen)

2-10-2011

<http://itech.fgcu.edu/faculty/clindsey/mhf4404/archimedes/archimedes.html>

3-10-2011

Stikordsregister

Apollonius fra Perga.....	88
Arkimedes.....	88
Centrum.....	74
Cirkel.....	74
cirkel.....	88
cirkelens areal.....	88
cylinderen.....	89
Den indskrevne cirkel.....	83
Den omskrevne cirkel.....	84
Diameter.....	74
ellipse.....	88
Figur.....	74
firsidede.....	75
firsidede Figurer.....	75
Fjerdeproportionalen.....	85
Flade.....	74
flersidede.....	75
geometrisk sted.....	82
Halvcirkel.....	75
hyperbel.....	88
keglesnittene.....	88
Kvadrat.....	75
ligebenet trekant.....	75
ligesidet (tresidet figur).....	75
ligesidet trekant.....	75
Linie.....	74
lodret paa den anden.....	74
Mellemproportionalen.....	86
Omkreds.....	74
parabel.....	88
Parallele linjer.....	75
Periferien.....	74
periferivinkel.....	86
plan Flade.....	74
plan Vinkel.....	74
Punkt.....	74
Rektangel.....	75
ret Linie.....	74
ret vinkel.....	74

Retlignede Figurer.....	75
retlinet.....	74
retvinklet trekant.....	75
Rhombe.....	75
Rhomboide.....	75
skæv Trekant.....	75
spids vinkel.....	74
spidsvinklet Trekant.....	75
stump Vinkel.....	74
stumpvinklet trekant.....	75
Trapezer.....	75
tresidede.....	75
π	88

Indholdsfortegnelse

Euklid.....	65
Indledning.....	67
Konstruktioner.....	69
En ligesidet trekant.....	69
Vinkelhalveringslinjen.....	70
Halvering af et linjestykke.....	71
At oprejse den vinkelrette.....	72
At nedfælde den vinkelrette.....	73
Euklids Elementer.....	74
Definitioner.....	74
Forudsætninger.....	75
Beviser.....	77
Sætning I.1.....	77
Beviset.....	77
Sætning I.4.....	79
Bevis.....	79
Kongruens.....	79
Opgaver.....	80
Opgaver	82
Andre sætninger.....	83
Sætning IV.4 (Den indskrevne cirkel).....	83
Bevis.....	83
Øvelse.....	84
Sætning IV.5 (Den omskrevne cirkel).....	84
Bevis.....	84
Sætning VI.12 (Fjerdeproportionalen).....	85
Bevis.....	85
Sætning VI.13 (Mellemproportionalen).....	86
Bevis.....	86
Øvelser.....	87
Andre græske matematikere.....	88
Arkimedes og π	88
Bestemmelse af π	88
Bestemmelse af cirkelns areal.....	88
Bestemmelse af kuglens areal.....	89
Øvelse.....	90
Kilder.....	91
Stikordsregister.....	92
Indholdsfortegnelse.....	94

Anhang 12.

Die Kegelschnitte.

A. Die Parabel.

1) **Erklärungen:** Der geometrische Ort eines Punktes P , der von einem festen Punkte F dieselbe Entfernung hat, wie von einer festen Geraden MN , heißt eine Parabel. Der Punkt F heißt der Brennpunkt, die Gerade MN die Leitlinie derselben. Jede Gerade, welche den Brennpunkt mit einem Punkte der Parabel verbindet, wird ein Radiusvektor (Brennstrahl), die durch F gehende, zur Leitlinie senkrechte Gerade die Achse, jede durch einen Punkt der Parabel gehende zu der Achse parallele Gerade ein Durchmesser (Parallelschneide) genannt. Die Benennungen Sehne, Sekante, Tangente haben entsprechende Bedeutungen wie bei dem Kreise.

Aufgabe: Beliebige viele Punkte einer Parabel zu konstruieren, wenn der Brennpunkt und die Leitlinie gegeben sind. A. 12. A. 7.

Lehrsatz: Die Parabel schneidet ihre Achse in der Mitte zwischen dem Brennpunkte und der Leitlinie.

Erklärung: Dieser Durchschnittspunkt heißt der Scheitel der Parabel.

Lehrsatz: Alle Punkte der Parabel liegen auf derjenigen Seite der Leitlinie, auf welcher der Brennpunkt liegt. L. 22.

Lehrsatz: Jedem Punkte P einer Parabel entspricht ein zweiter Punkt P^1 derselben, so daß PP^1 senkrecht zur Achse steht und von dieser halbiert wird. L. 31. 12. 43, Zus. 2.

Zusatz: Jede zur Achse senkrechte Gerade schneidet die Parabel in zwei Punkten, welche gleich weit von der Achse abstehen, oder die Achse