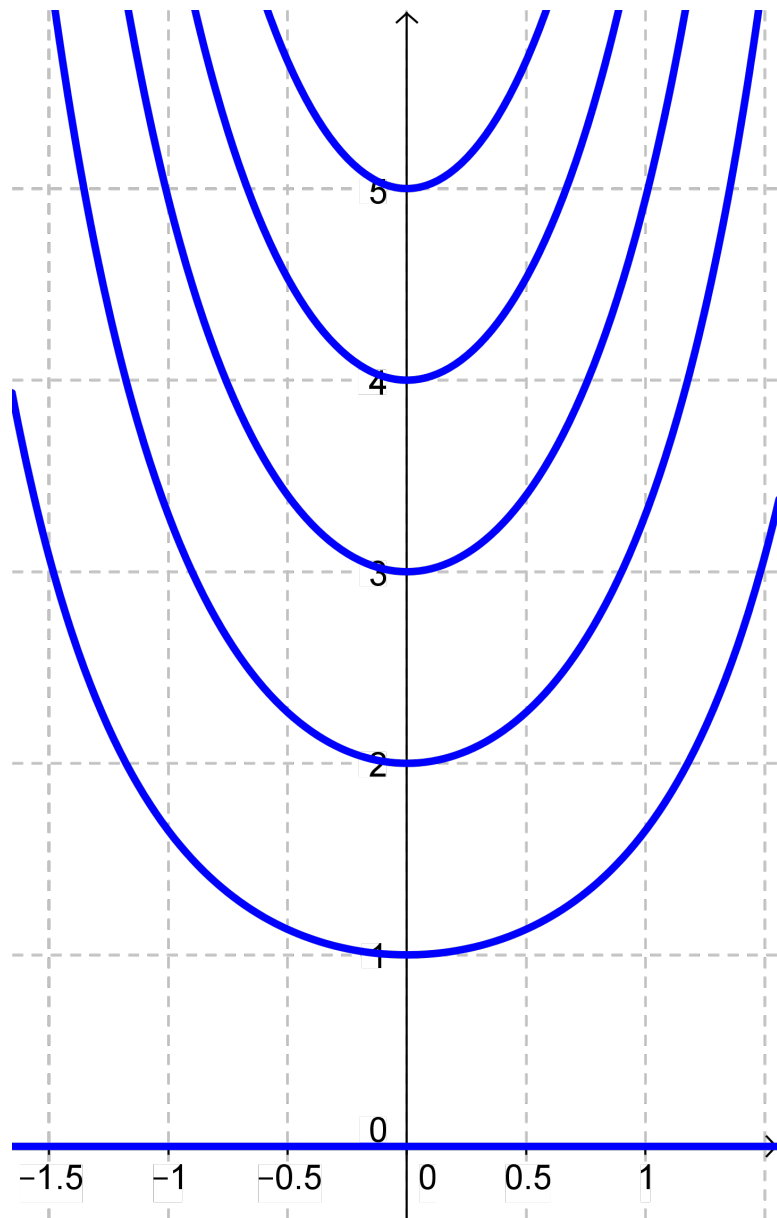


Differentialligninger

Ib Michelsen



Ikast 2013

Indholdsfortegnelse.....	2
Ligninger og løsninger.....	3
Indledning.....	3
Lineære differentialligninger af første orden.....	3
Eksempler på kontrol af løsning.....	4
Eksempel 1: Er løsningen en løsning?.....	4
Eksempel 2: Er løsningen en løsning?.....	4
Eksempel 3: Find løsningen med CAS.....	4
Betegnelser.....	5
Beregningseksempler.....	5
Eksempel 4: Tangent.....	5
Eksempel 5: Væksthastighed.....	6
Løsning af den specielle lineære differentialligning.....	6
Sætning.....	6
Løsning af den generelle lineære differentialligning.....	6
Sætning.....	6
Bevis.....	7
Formel.....	7
IT løsningen.....	7
Løsning af en Bernoulliligning.....	8
Løsning.....	8
Løsning af den logistiske differentialligning.....	8
Løsning.....	9
Formel	10
Eksempel 6.....	10
Løsning af differentialligninger ved separation.....	11
Sætning.....	11
Bevis.....	12
Eksempel 7.....	12
stx A, 18. maj 2011 (opgave 13).....	13
stx A, 24. maj 2011 (opgave 13).....	14
stx A, august 2011 (opgave 13).....	15
stx A, december 2011 (opgave 11).....	17
Differential-ligninger i stxopg.....	18
2012.....	18
2013.....	21

Ligninger og løsninger

Indledning

Almindelige ligninger kender du. De kan fx se sådan ud:

$$(1) \quad 3 \cdot x + 4 = 7$$

3, 4 og 7 er (i eksemplet og som oftest) nogle reelle tal. Opgaven er at finde den mængde af (reelle) tal, der gør ligningen sand. Her ses nemt, at

$$L = \{ 1 \}$$

I andre tilfælde kan der være alt fra ingen til uendelig mange løsninger.

Hvis faktoren foran x ikke er nul, kan ligningen omskrives som vist herunder; hvis den er nul, er ligningen ikke særlig interessant.

$$(1.1) \quad 3 \cdot x + 4 = 7 \Leftrightarrow \frac{3 \cdot x}{3} + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$

Oftest vil almindelige lineære ligninger kunne omskrives tilsvarende, så vi får en ligning som:

$$(2) \quad x + a = b$$

Men lad os udvide ligningsbegrebet. x , a og b kunne jo godt være funktioner med

$DM = I \subseteq \mathbb{R}$. Opgaven er så at finde mængden af funktioner, der gør ligningen sand. Og lad os forudsætte, at i dette hæfte er a og b kontinuerte funktioner.

Fx kunne a være defineret som:

$$(2.1) \quad a(t) = t^2 - 3t + 5$$

Tilsvarende for $b(t)$ og funktionen $x(t)$ findes nemt som differensen mellem de to funktioner.

Og nu nærmer vi os differentialligningerne: Det er ligninger, hvor der skal findes en funktion eller en mængde af funktioner. Her er et vigtigt eksempel:

Lineære differentialligninger af første orden

$$(3) \quad x'(t) + a(t) \cdot x(t) = b(t)$$

Ligningen (3) er en differentialligning. En differentiabel funktion $f(x)$ er en løsning til ligningen, hvis

$$(3.1) \quad f'(t) + a(t) \cdot f(t) = b(t)$$

I (3) står $x(t)$ for en (måske) eksisterende ubekendt funktion og $x'(t)$ for dennes afledte funktion. Ligningen siges at være af første orden, fordi den første afledte funktion indgår i

ligningen men ikke $x''(t)$, $x'''(t)$ osv. Hvis også den anden afledte indgik, var der tale om en anden ordens differentialligning. Ligningen kaldes "lineær" når venstresiden kan skrives som en lineær funktion $F(x)$. At F er lineær, betyder at linearitetsbetingelserne er opfyldt: $F(x_1+x_2)=F(x_1)+F(x_2)$ og $F(k \cdot x)=k \cdot F(x)$

Eksempler på kontrol af løsning

Eksempel 1: Er løsningen en løsning?

Lad der være givet en befolkning (af mennesker, gærceller eller kaniner) med størrelsen $B(t)$ til tiden t , som vokser ligefrem proportionalt med $B(t)$; så fås

$$(4) \quad B'(t) = k \cdot B(t)$$

Det ses nemt, at vi har en differentialligning som i (3); her benyttes blot B i stedet for x . En løsning kunne være

$$(4.1) \quad f(t) = B_0 \cdot e^{kt}$$

hvis befolkningen til tiden 0 har størrelsen B_0

Kontroller, at $f(t)$ er en løsning til (4)

Eksempel 2: Er løsningen en løsning?

Lad der være givet differentialligningen

$$(5) \quad x'(t) + x(t) = 2 \cdot t^2 - 4$$

Kontroller, at $f(t)$ er en løsning til (1.7), hvor

$$(5.1) \quad f(t) = 2 \cdot t^2 - 4t$$

Eksempel 3: Find løsningen med CAS

Givet ligningen (6) skal du finde løsningsmængden med dit CAS-værktøj.

$$(6) \quad y' = -y$$

Antag at du benytter GeoGebra: I Vis-menuen vælges CAS, i den første tomme række indtastes: "BeregnODE[y'=-y]+<Retur>"

Efter et øjeblik står der på linjen nedenunder en pil og svaret i (6.1):

$$(6.1) \quad y = \frac{c_3}{e^x}$$

3 er et tilfældigt løbenummer og har ingen betydning i sig selv. c_3 er en konstant i den enkelte løsning, men der er en løsning for alle mulige værdier af konstanten. Svaret skal læses: $f(x) = \frac{c_3}{e^x}$ er en løsning for enhver værdi af c_3 .

Kontroller, at $f(x)$ er en løsning til (6) lige meget hvad konstanten er.

Betegnelser

Som ubekendt funktion har vi nu benyttet både B , x og y . Og det er i princippet ligemeget. GeoGebra har som default, at den uafhængige variabel er x og den ukendte funktion er y . Det fremgår også af eksemplet herover.

Hvis funktionen hedder $B(t)$ kan du indtaste ligningen sådan: "BeregnODE[B'=k * B,B,t]"

Gør det og kontroller løsningen.

Den afledte funktion kan betegnes på forskellige måder: Hvis funktionen kaldes y eller $y(x)$ eller $f(x)$, og $y=2x^3-4x+5$ kan den afledte funktion navngives med de herunder viste "lige gode" muligheder:

$$(7) \quad y' = y'(x) = f'(x) = \frac{dy}{dx} = (2x^3 - 4x + 5)'$$

Beregningseksempler

Eksempel 4: Tangent

Lad der være givet en differentialligning som:

$$(8) \quad y' = 2x - y$$

Løsningernes grafer, som kaldes integralkurver, går gennem ethvert punkt i $I \times \mathbb{R}$, hvor I er det interval, hvor funktionerne er defineret.

Vi ønsker at finde tangenten i $P(2,5)$ til integralkurven gennem dette punkt; så er $x=2$, $y=5$ og ifølge (8) er tangenthældningen

$$(8.1) \quad a = y' = 2 \cdot 2 - 5 = -1$$

Tangentens anden parameter findes med formlen

$$(8.2) \quad b = y_1 - a x_1$$

hvor de kendte tal indsættes:

$$(8.3) \quad b = 5 - (-1)2 = 7$$

Tangentligningen bliver derfor

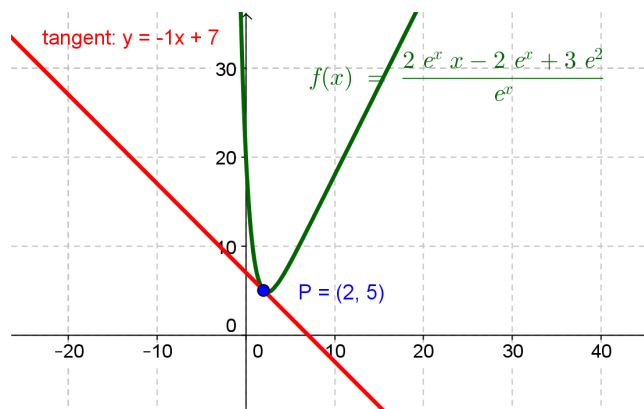
$$(8.4) \quad y = -x + 7$$

Som kontrol findes grafen for den relevante integralkurve med CAS :

"BeregnODE[y'=2*x-y, (2,5)]", hvor både ligning og punktet P indgår i kommandoen:

$$(8.5) \quad y = \frac{2e^x x - 2e^x + 3e^2}{e^x}$$

Graf og tangent ses til højre:



Eksempel 5: Væksthastighed

y' kan være angivet på 3 forskellige måder; i alle tilfælde er det trivielt at indsætte kendte tal for at finde væksthastigheden til en given tid (x -værdi) eller en given y -værdi

$$(9.1) \quad y' = F(y)$$

$$(9.2) \quad y' = F(x)$$

$$(9.3) \quad y' = F(x, y)$$

Løsning af den specielle lineære differentiaalligning

Sætning

Lad b være en kontinuert funktion defineret i et interval I .

Den fuldstændige løsning til differentiaalligningen:

$$(10) \quad y' = b$$

er så mængden af stamfunktioner til b , så hvis

$$(10.1) \quad f(x) = \int b(x) dx$$

fås alle løsninger som

$$(10.2) \quad [f(x) + k \mid k \in \mathbb{R}]$$

Løsning af den generelle lineære differentiaalligning

Sætning

Lad a og b være kontinuerte funktioner defineret i et interval I .

Den fuldstændige løsning til differentiaalligningen:

$$(11) \quad y' + a y = b \quad \text{eller} \quad y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x)$$

er mængden af funktioner:

$$(11.1) \quad f(x) = e^{-A}(B+k)$$

hvor A er en stamfunktion til a , B er en stamfunktion til $b \cdot e^A$ og k er en vilkårlig reel konstant.

Bevis

$$(12) \quad y' + a y = b$$

Lad A være en stamfunktion til a og definer

$$(12.1) \quad e^A(x) = e^{A(x)}$$

hvoraf følger:

$$(12.2) \quad e^A(x) > 0$$

Multipliseres der på begge sider af lighedstegnet i ligningen (12) med e^A , fås

$$(12.3) \quad e^A \cdot y' + a \cdot e^A \cdot y = b \cdot e^A$$

I (12.3) kan venstresiden omskrives, hvilket ses i (12.4 – 12.6):

$$(12.4) \quad (e^A \cdot y)' = (e^A)' \cdot y + e^A \cdot y' \Leftrightarrow \quad (\text{Produktreglen})$$

$$(12.5) \quad (e^A \cdot y)' = e^A \cdot A' \cdot y + e^A \cdot y' \Leftrightarrow \quad (\text{Differentiation af sammensat funktion})$$

$$(12.6) \quad (e^A \cdot y)' = e^A \cdot a \cdot y + e^A \cdot y' \quad (A' = a, \text{ da } A \text{ er stamfunktion til } a)$$

og da venstresiden af (12.3) er lig med højresiden af (12.6) fås

$$(12.7) \quad (e^A \cdot y)' = b \cdot e^A$$

Nu er problemet med at finde en løsning det samme som i ligningen (10); med

$B = \int b \cdot e^A dx$ - som eksisterer, da $b \cdot e^A$ ifølge forudsætningerne bliver en kontinuert funktion, fås

$$(12.8) \quad e^A \cdot f(x) = \int b \cdot e^A dx + k = B + k \Leftrightarrow$$

Formel

$$(12.9) \quad f(x) = e^{-A} \cdot (B + k)$$

IT løsningen

Ved at følge linket kan du se, hvorledes du løser en sådan ligning med GeoGebras Cas-værktøj eller ved indtastning af funktionerne a og b og ved hjælp af formlerne ovenfor

beregne A , B og forskriften for løsningen f .

<http://mimimi.dk/Mixi/difLign/linDifLign.html>: Løs lineær differentialligning

Løsning af en Bernoulliligning

En Bernoulliligning (13) er ikke en lineær differentialligning; der indgår en potens af funktionen y , hvor eksponenten n er forskellig fra 1

$$(13) \quad y' + a y = b \cdot y^n$$

Løsning

Løsningen foregår ved at indføre en funktion z (som også er ukendt); den defineres som

$$(13.1) \quad z = y^{(1-n)}$$

z differentieres som en sammensat funktion med hensyn til x .

$$(13.2) \quad \begin{aligned} z' &= \frac{dz}{dx} = (1-n) \cdot y^{(1-n-1)} \cdot y' = (1-n) \cdot y^{(-n)} = \frac{1-n}{y^n} \cdot y' \Leftrightarrow \\ \frac{z'}{1-n} &= \frac{y'}{y^n} \end{aligned}$$

Nu omformes ligningen (13) ved at dividere på begge sider med y^n

$$(13.3) \quad \begin{aligned} y' + a y &= b \cdot y^n \Leftrightarrow \\ \frac{y'}{y^n} + \frac{a y}{y^n} &= \frac{b \cdot y^n}{y^n} \Leftrightarrow \\ \frac{z'}{1-n} + a \cdot y^{1-n} &= b \Leftrightarrow \end{aligned}$$

hvor den sidste omskrivning fås med (13.2)

$$(13.4) \quad \frac{z'}{1-n} + a \cdot z = b$$

og denne med (13.1). Ligningen optræder nu som en lineær differentialligning: Afhængig af funktionerne a og b kan løsningen findes først for (13.4) og dernæst for (13).

Løsning af den logistiske differentialligning

$$(14) \quad y' = k \cdot y \cdot (M - y)$$

Ligningen beskriver sammenhængen mellem væksthastigheden og en voksende størrelse for $y < M$, idet $k > 0$. Ofte gør man brug af modellen i biologi, hvor den beskriver en populations vækst: Hvis y er meget lille sammenlignet med M , er der tale om eksponentiel vækst. Er de to størrelser næsten lige store, er y' tæt på nul og væksten er gået i stå. Er $M <$

y , vil væksten være negativ.

Ligeledes har økonomer brugt modellen til at beskrive væksten inden for flere områder: Som eksempler kan nævnes studier af arbejdskraft, kapital og markedet for en vare.

Løsning

$$(14.1) \quad \begin{aligned} y' &= k \cdot y \cdot (M - y) = (kM) \cdot y - k \cdot y^2 \Leftrightarrow \\ y' + (-kM) \cdot y &= (-k) \cdot y^2 \Leftrightarrow \\ y' + a \cdot y &= b \cdot y^2 \end{aligned}$$

hvor $a = -kM$, $b = -k$. Det ses, at ligningen er omskrevet til en Bernouilliligning, hvor $n = 2$.

Funktionen z defineres som

$$(14.2) \quad z = y^{(1-n)}$$

og da n her er 2 fås ved indsætning:

$$(14.3) \quad z = y^{-1} = \frac{1}{y}$$

For z løses differentiaalligningen

$$(14.4) \quad \frac{z'}{1-n} + a \cdot z = b$$

hvor de aktuelle størrelser indsættes:

$$(14.5) \quad \begin{aligned} \frac{z'}{-1} + (-kM) \cdot z &= -k \Leftrightarrow \\ z' + (kM) \cdot z &= k \end{aligned}$$

Nu løses den sidste ligning som en første ordens lineær differentiaalligning:

$$(14.6) \quad A = \int kM dx = kMx$$

$$(14.7) \quad B = \int e^{kMx} \cdot k dx = k \cdot \int e^{kMx} dx = \frac{k}{kM} \cdot e^{kMx} = \frac{1}{M} \cdot e^{kMx}$$

$$(14.8) \quad g(x) = e^{-kMx} \cdot \left(\frac{1}{M} \cdot e^{kMx} + c \right) = \frac{1}{M} + c \cdot e^{-kMx}$$

I (14.8) er c en vilkårlig konstant. Da g er en løsning til ligningen med z , fås løsningen f til ligningen med y som

$$(14.9) \quad f(x) = \frac{1}{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\frac{1}{M} + c \cdot e^{-kMx}} = \frac{M \cdot e^{kMx}}{e^{kMx} + M c}$$

Formel

$$(14.10) \quad f(x) = \frac{M \cdot e^{kMx}}{e^{kMx} + Mc}$$

Søges den løsning hvor $P=(x_1, y_1)$ ligger på grafen, fås

$$(14.11) \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{M \cdot e^{kMx_1}}{e^{kMx_1} + Mc} \Leftrightarrow \\ y_1 \cdot (e^{kMx_1} + Mc) &= M \cdot e^{kMx_1} \Leftrightarrow \\ y_1 \cdot e^{kMx_1} + y_1 Mc &= M \cdot e^{kMx_1} \Leftrightarrow \\ y_1 Mc &= M \cdot e^{kMx_1} - y_1 \cdot e^{kMx_1} \Leftrightarrow \\ c &= \frac{M e^{kMx_1} - y_1 e^{kMx_1}}{y_1 M} \end{aligned}$$

Det vil sige, at konstanten kan bestemmes med formlen (14.12)

$$(14.12) \quad c = \frac{M e^{kMx_1} - y_1 e^{kMx_1}}{y_1 M}$$

Eksempel 6

Løs differentiaalligningen:

$$(14.13) \quad y' = 0,05 \cdot y \cdot (100 - y)$$

Løsningen findes umiddelbart ved at indsætte de oplyste konstanter i (14.10):

$$(14.14) \quad f(x) = \frac{100 \cdot e^{0,05 \cdot 100 \cdot x}}{e^{0,05 \cdot 100 \cdot x} + 100c}$$

hvor c er en konstant svarende til den enkelte graf (integralkurve.)

Hvis opgaven er at finde kurven gennem et bestemt punkt som $P = (0,5 ; 20)$, indsættes punktets koordinater i (14.10) (eller nemmere i (14.12):

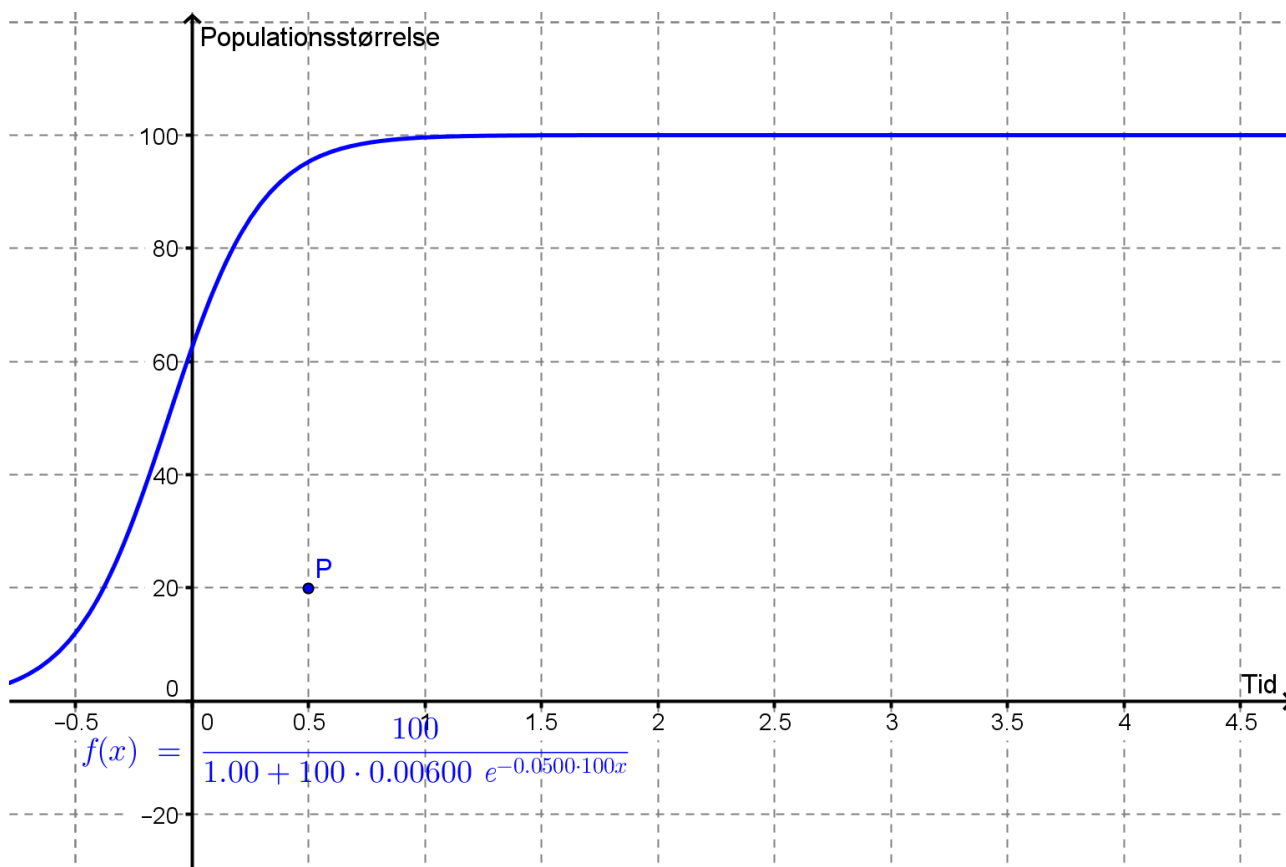
$$(14.15) \quad \begin{aligned} 20 &= \frac{100 \cdot e^{0,05 \cdot 100 \cdot 0,05}}{e^{0,05 \cdot 100 \cdot 0,05} + 100c} \Leftrightarrow \\ e^{0,05 \cdot 100 \cdot 0,05} + 100c &= \frac{100 \cdot e^{0,05 \cdot 100 \cdot 0,05}}{20} \Leftrightarrow \\ 100c &= \frac{100 \cdot e^{0,05 \cdot 100 \cdot 0,05}}{20} - e^{0,05 \cdot 100 \cdot 0,05} \Leftrightarrow \\ c &= \frac{\frac{100 \cdot e^{0,05 \cdot 100 \cdot 0,05}}{20} - e^{0,05 \cdot 100 \cdot 0,05}}{100} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$(14.16) \quad c = 0,487 \quad \text{og heraf følger:}$$

$$(14.17) \quad f(x) = \frac{100 \cdot e^{0,05 \cdot 100x}}{e^{0,05 \cdot 100x} + 48,7}$$

En tilfældig valgt integralkurve kan ses på tegningen på næste side; med linket her kan du se den samme og undersøge betydningen af konstantens værdi.

<http://mimimi.dk/mixi/diflign/logist2.html>: Undersøg den logistiske differentialligning



Løsning af differentialligninger ved separation

Lad der være givet en ligning som (15), hvor højresiden, som i den generelle ligning er en kendt funktion af både x og y , men kan skrives som et produkt af to funktioner, hvor den ene er en funktion af y og den anden en funktion af x . Der gælder da:

Sætning

Ligningen

$$(15) \quad y' = g(y) \cdot h(x)$$

har løsningen $y = f(x)$ som er implicit givet ved ligningen

$$(15.1) \quad \int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx + k$$

Bevis

Antag, at $f(x)$ er en løsning til (15.1). Så følger umiddelbart af omskrivningerne i (15.2)

$$(15.2) \quad \begin{aligned} \int \frac{1}{g(y)} dy &= \int h(x) dx + k \Leftrightarrow \\ \left(\int \frac{1}{g(y)} dy \right)' &= \left(\int h(x) dx \right)' \Leftrightarrow \\ \frac{1}{g(y)} \cdot \frac{dy}{dx} &= h(x) \Leftrightarrow \\ \frac{1}{g(y)} \cdot y' &= h(x) \Leftrightarrow \\ y' &= g(y) \cdot h(x) \end{aligned}$$

at $f(x)$ er en løsning til ligningen (15). Og omvendt: hvis $f(x)$ er en løsning til (15), skal den også være en løsning til (15.1).

Eksempel 7

Løs den separable ligning (15.3):

$$(15.3) \quad y' = \frac{y \cdot a}{x}, \quad x > 0$$

Idet $g(y) = y$ og $h(x) = \frac{a}{x}$ ses ifølge (15.2)

$$(15.4) \quad \begin{aligned} y' &= \frac{y \cdot a}{x} \Leftrightarrow \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int \frac{a}{x} dx + c \Leftrightarrow \\ \ln(y) &= a \cdot \ln(x) + c \Leftrightarrow \\ y &= x^a \cdot e^c \end{aligned}$$

Mængden af løsninger er altså potensfunktioner med begyndelsesværdien $b = e^c = f(1)$. Bemærk, at når c gennemløber de reelle tal, gennemløber b de positive reelle tal.

$$(15.5) \quad f(x) = b \cdot x^a, \quad x > 0$$

stx A, 18. maj 2011 (opgave 13)

I et kredsløb er $I(t)$ strømstyrken målt i ampere en funktion af tiden t målt i sekunder, hvorom der gælder:

$$0,4 \cdot \frac{dI}{dt} + 10I = 9$$

Strømstyrkens væksthastighed

Det oplyses, at $I = 0,3$

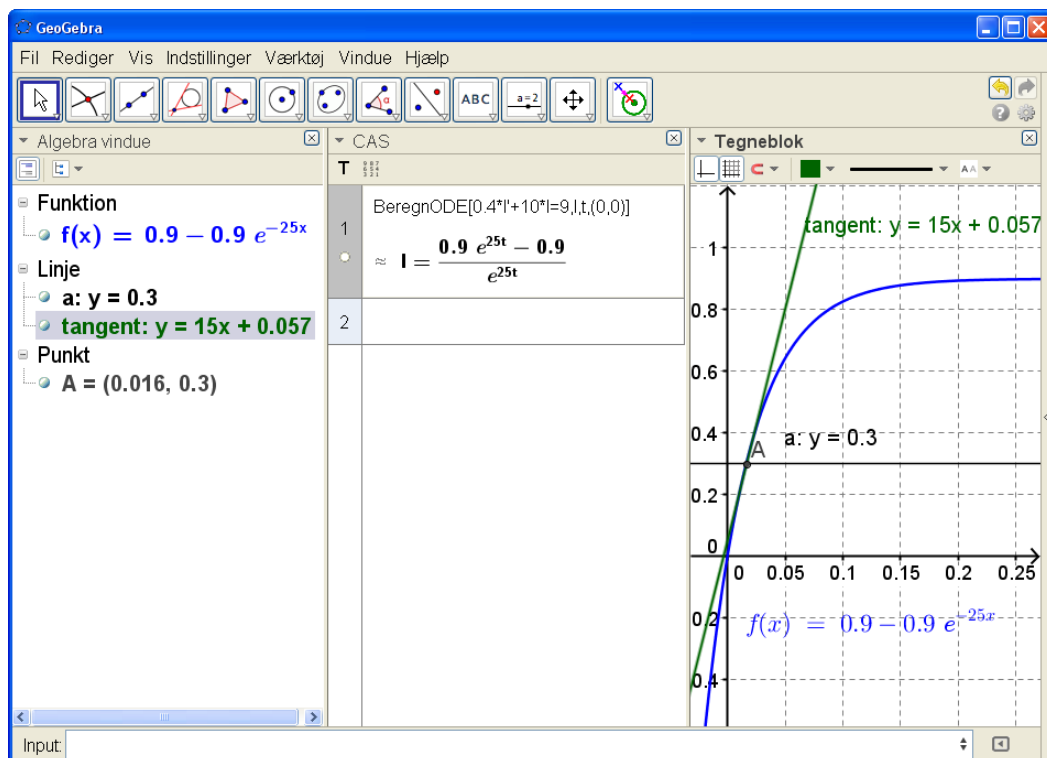
Værdien indsættes i differentialligningen, som herefter løses:

$$0,4 \cdot \frac{dI}{dt} + 10 \cdot 0,3 = 9 \Leftrightarrow 0,4 \cdot \frac{dI}{dt} + 3 - 3 = 9 - 3 \Leftrightarrow 0,4 \cdot \frac{dI}{dt} = 6 \Leftrightarrow 0,4 \cdot \frac{dI}{dt} = 15$$

Når $I = 0,3$ er væksthastigheden af strømstyrken = 15 ampere pr. sekund

Forskriften for $I(t)$

Differentialligningen løses, idet punktet $(0,0)$ skal ligge på integralkurven:



I CAS-vinduet ses, at løsningen er funktionen

$$I(t) = \frac{9 \cdot e^{25 \cdot t} - 9}{10 \cdot e^{25 \cdot t}} \Leftrightarrow$$

$$I(t) = 0,9 - 0,9 \cdot e^{-25 \cdot t}$$

stx A, 24. maj 2011 (opgave 13)

Sars-epidemien beskrives med differentialligningen:

$$\frac{dN}{dt} = 0,00526 \cdot N \cdot (209 - N)$$

hvor N er antal smittede til tidspunktet t (som måles i døgn).

Væksthastigheden

Hvis $N = 100$, findes væksthastigheden ved indsættelse i ligningen:

$$\frac{dN}{dt} = 0,00526 \cdot 100 \cdot (209 - 100) = 57,334$$

Væksthastigheden er 57 smittede pr. døgn i tidspunktet med 100 smittede

Løsning af differentialligningen

Differentialligning er en logistisk differentialligning, hvor

tallet 209 er det tal, antallet af smittede vil nærme sig efterhånden, som tiden går.

(Matematisk udtrykt er det grænseværdien for $N(t)$, når t går mod uendelig.)

Alle logistiske differentialligninger kan skrives som:

$$y' = k \cdot y \cdot (M - y)$$

og de har alle løsningerne:

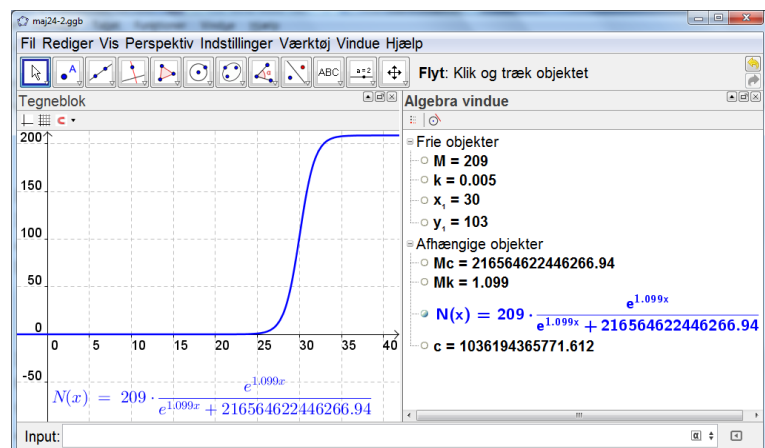
$$y = M \cdot \frac{e^{k M x}}{e^{k M x} + M \cdot c},$$

hvor c er en konstant. Givet at $P = (x_1, y_1)$ ligger på grafen for den søgte løsning, kan c beregnes med formlen:

$$c = \frac{(M e^{k M x_1} - y_1 e^{k M x_1})}{y_1 M}.$$

I denne opgave er $M = 209$, $k = 0,00526$ og $P = (30, 103)$. Disse tal indsættes og hermed er løsningen:

$$N(t) = 209 \cdot \frac{e^{1,1 t}}{e^{1,1 t} + 217 \cdot 10^{12}}$$



stx A, august 2011 (opgave 13)

Udviklingen af en bestemt kræfttype beskrives med differentialligningen:

$$\frac{dN}{dt} = 0,82 \cdot 0,88^t \cdot N$$

hvor N er antal kræftceller (målt i millioner) til tidspunkt t (målt i døgn.)

Væksthastigheden for $t = 10$

Det oplyses, at $N(10) = 266$; disse tal indsættes i ligningen:

$$\frac{dN}{dt} = 0,82 \cdot 0,88^{10} \cdot 266 = 60,7$$

I modellen er væksthastigheden efter 10 døgn 61 mio. kræftceller pr. døgn.

Forskrift for N

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= 0,82 \cdot 0,88^t \cdot N \Leftrightarrow \\ \int \frac{1}{N} dN &= \int 0,82 \cdot 0,88^t dt + c \Leftrightarrow \\ \ln N &= \frac{0,82 \cdot 0,88^t}{\ln(0,88)} + c \Leftrightarrow \\ N &= e^{\frac{0,82 \cdot 0,88^t}{\ln(0,88)} + c} = e^{-6,41 \cdot 0,88^t} \cdot e^c = e^{-6,41 \cdot 0,88^t} \cdot c_1 \end{aligned}$$

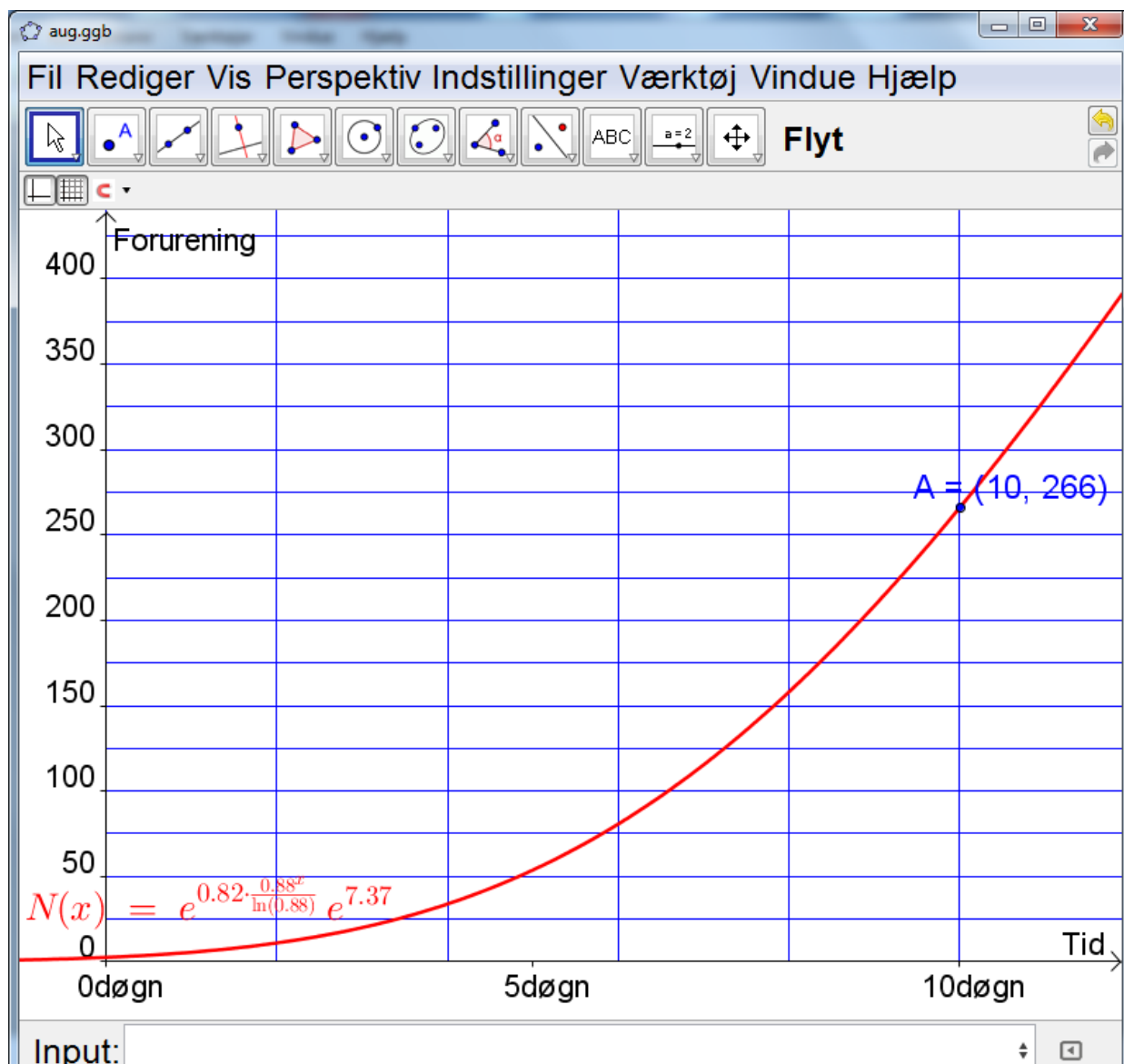
Da $t = N(10) = 266$ følger

$$\begin{aligned} 266 &= e^{-6,41 \cdot 0,88^{10}} \cdot c_1 \Leftrightarrow \\ \frac{266}{e^{-6,41 \cdot 0,88^{10}}} &= c_1 \Leftrightarrow \\ c_1 &= 1590 \end{aligned}$$

som indsættes i forskriften for N :

$$N(t) = 1590 \cdot e^{-6,41 \cdot 0,88^t}$$

(Se graf på næste side)



Note:

CAS-værktøjet i GeoGebra kan finde løsningen $y = 266 e^{-41 e^{-x^{0.1278}} \cdot 0.1565} \cdot 5.9684$, hvor funktionen faktisk er den samme.

stx A, december 2011 (opgave 11)

Fra et rør løber forurenat vand ned i en tønde med vand. Med $C(t)$ betegnes koncentrationen (målt i ppm) af det

forurenende stof i tønden til tidspunktet t (målt i minutter).

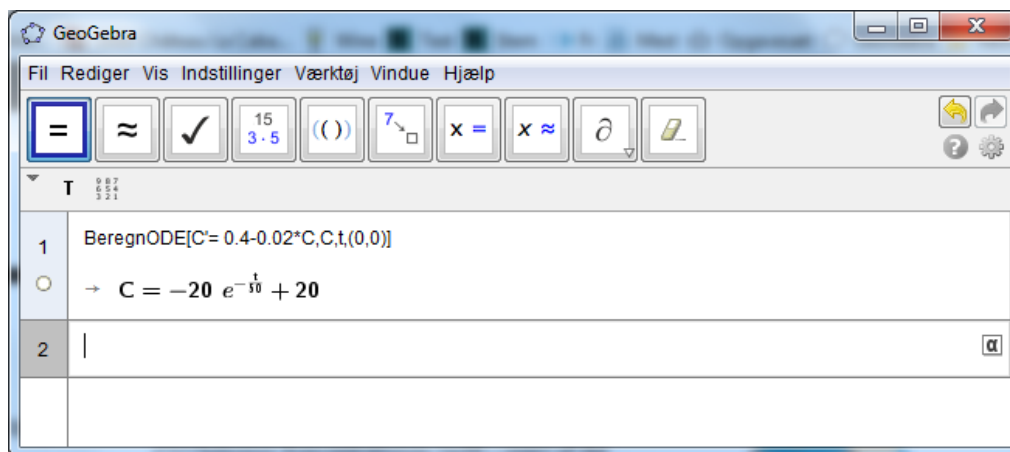
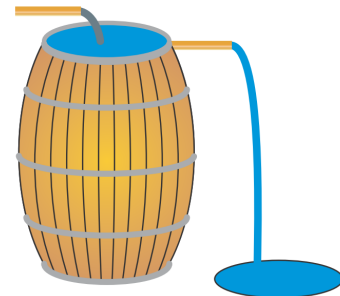
I en model antages det, at $C(t)$ er en løsning til

differentialligningen $\frac{dC}{dt} = 0,4 - 0,02 \cdot C$.

Oplyst: $C(0) = 0$.

Bestem forskriften for C

Ligningen løses med GeoGebra:



$$C(t) = -20 \cdot e^{\left(\frac{-t}{50}\right)} + 20$$

Skitse af graf

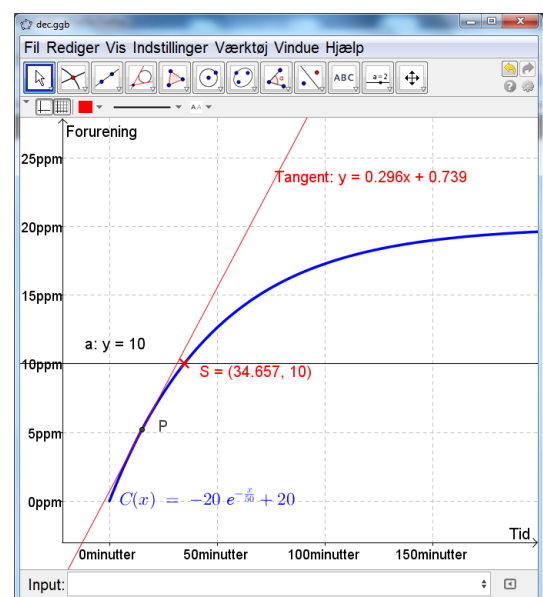
Skitsen tegnes ved indtastning af funktionsforskriften. (Se figur til højre.)

Tidspunkt for koncentration = 10 ppm

Tidspunktet findes ved at finde skæringspunktet S mellem grafen for C og linjen $y = 10$.

Koncentrationen 10 ppm nås efter 34,7 minutter

$C'(15)$



På figuren aflæses $C'(15)$ som tangenthældningen i punktet $P = (15 ; C(15))$.

$C'(15) = 0,30$

Det betyder, at efter 15 minutter øges forureningen med 0,30 ppm pr minut.

Differential-ligninger i stxopg

2012

- Opgave 14** I en model for farten af en raket, der skydes lodret op, er rakettenes fart som funktion af tiden en løsning til differentialligningen

$$\frac{dv}{dt} - \frac{1}{15-t} \cdot v = \frac{300}{15-t} - 9,81, \quad 0 \leq t \leq 14$$

hvor $v(t)$ er rakettenes fart (målt i m/s) til tidspunktet t målt i sekunder efter affyring.

Til tidspunktet $t = 0$ er rakettenes fart 0 m/s.

- a) Bestem en forskrift for v , og bestem det tidspunkt, hvor rakettenes fart når op på 1000 m/s.



Foto: NASA

- Opgave 14** I en model er en persons vægt som funktion af tiden en løsning til differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = \frac{k}{7000} - \frac{42}{7000} \cdot m,$$

hvor $m(t)$ er personens vægt (målt i kg) til tidspunktet t (målt i døgn), og k er personens kostindtag (målt i kcal/døgn).

En bestemt person vejer 85 kg og indtager 3300 kcal/døgn.

- a) Hvad er væksthastigheden for denne persons vægt?

Om en anden person oplyses, at personen vejer 87 kg til tidspunktet $t = 0$.

- b) Bestem personens vægt udtrykt ved t og k .
c) Bestem k , så personen vejer 80 kg efter 100 døgn.



Opgave 14 I en model kan udviklingen i et barns højde de første 48 måneder beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dh}{dt} = 5,24 - 0,045 \cdot h, \quad 0 \leq t \leq 48$$

hvor t er barnets alder (målt i måneder), og h er barnets højde (målt i cm). I modellen er et barn 50 cm højt ved fødslen.

- Benyt modellen til at bestemme væksthastigheden, når barnet er 100 cm højt.
- Bestem en forskrift for h , og benyt denne til at bestemme barnets alder, når det er 100 cm højt.

Opgave 12 En fisk af arten Pintado fodres med en bestemt slags krebsdyr, hvorved det relative kulstof-13-indhold i Pintadoens muskelvæv forøges.

I en model kan udviklingen i det relative kulstof-13-indhold i Pintadoens muskelvæv beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dM}{dt} = 5,1742 - 0,1584M,$$

hvor $M(t)$ betegner det relative kulstof-13-indhold (målt i promille) til tiden t (målt i døgn efter påbegyndt fodring).

Det oplyses, at det relative kulstof-13-indhold var 20 promille, da fodringen blev påbegyndt.

- Bestem en forskrift for M .
- Skitsér grafen for M , og bestem den øvre grænse for det relative kulstof-13-indhold i Pintadoens muskelvæv.



Pintado (Foto: Lerdsuwa)

- Opgave 12** Et kar med saltvand tilføres løbende en saltopløsning, mens der samtidig løber saltvand ud af karret.
I en model kan udviklingen i saltmængden i karret beskrives ved en funktion S , der er løsning til differentialligningen

$$\frac{dS}{dt} = 1,5 - \frac{2}{100+t} \cdot S,$$

hvor $S(t)$ er saltmængden (målt i kg) til tidspunktet t (målt i minutter).

Det oplyses, at der er 30 kg salt i karret til tidspunktet $t = 0$.

- Bestem en forskrift for S .
- Bestem det tidspunkt, hvor der er 60 kg salt i karret.

- Opgave 13** Over 90% af Kinas perleproduktion kommer fra en bestemt perleøsters, *Pinctada martensii*. Udviklingen i vægten for en af disse perleøsters kan beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dV}{dt} = 0,00018 \cdot V \cdot (53,63 - V),$$

hvor $V(t)$ betegner vægten (målt i g) til tiden t (målt i døgn).

Det oplyses, at vægten var 0,59 g, da man påbegyndte målingerne.

- Bestem en forskrift for $V(t)$.
- Bestem det tidspunkt, hvor vægtilvæksten er størst.



Foto: Wikimedia Commons

Kilde: *Growth of Cultured Pearl Oyster (Pinctada martensii) in Li'an Lagoon, Hainan Island, China, Gu Zhifeng m.fl., Journal of Shellfish Research, 28(3): 465-470. 2009.*

2013

Opgave 16

En steg sættes til langtidstegning i en ovn. I en model er stegens indre temperatur T (målt i $^{\circ}\text{C}$) en funktion af tiden x (målt i minutter). Den hastighed, hvormed stegens indre temperatur stiger til tidspunktet x , er proportional med forskellen mellem ovnens temperatur og stegens indre temperatur. Det oplyses, at ovnens temperatur er 150°C , og at proportionalitetskonstanten er 0,011.

- a) Opstil en differentiaalligning, som T må opfylde.



Foto: commons.wikimedia.org

Opgave 13

I en model betegner N antal traner i en tranebestand i Hokkaido-området i Japan. I modellen antages det, at N som funktion af tiden er en løsning til differential-ligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0,00029N \cdot (1500 - N),$$

hvor t er antal år efter 1975.

- a) Bestem tranebestandens væksthastighed, da der var 500 traner i bestanden.

Det oplyses, at tranebestanden i 1975 var 194 traner.

- b) Bestem en forskrift for N .
c) Bestem det tidspunkt, hvor væksthastigheden for tranebestanden var størst.



Foto: commons.wikimedia.org

Kilde: *A simple population viability analysis of Tancho (Grus japonensis) in southeastern Hokkaido, Japan*, Yoshiyuki Masatomi, Seigo Higashi and Hiroyuki Masatomi, 2007.

Opgave 7

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x \cdot e^x - x.$$

- a) Undersøg, om f er en løsning til differentiaalligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x \cdot e^x.$$

Opgave 15 I en model for en bestemt kemisk reaktion omdannes et stof A . Mængden af stoffet A som funktion af tiden er en løsning til differentialligningen:

$$\frac{dM}{dt} = -k \cdot M^2,$$

hvor k er en konstant, og M er mængden (målt i mg) af stoffet A til tidspunktet t (målt i minutter). Til tidspunktet $t = 0$ er der 70 mg af stoffet A , og til tidspunktet $t = 60$ er der 20 mg tilbage af stoffet A .

- Bestem en forskrift for $M(t)$, og bestem konstanten k .
- Bestem $M'(60)$, og gør rede for betydningen af dette tal.

Opgave 16 En beholder er fyldt med en gas under tryk. Fra en lille ventil i toppen af beholderen strømmer gas ud. I en model er trykket i beholderen P (målt i atm) som funktion af tiden t (målt i minutter efter åbning af ventilen) en løsning til differentialligningen

$$\frac{dP}{dt} = -k \cdot (P - 1,0).$$

Det oplyses, at trykket til tidspunktet $t = 0$ er 5,0 atm, og at trykket til tidspunktet $t = 25$ er 2,0 atm.

- Bestem en forskrift for $P(t)$, og skitsér grafen for $P(t)$.

