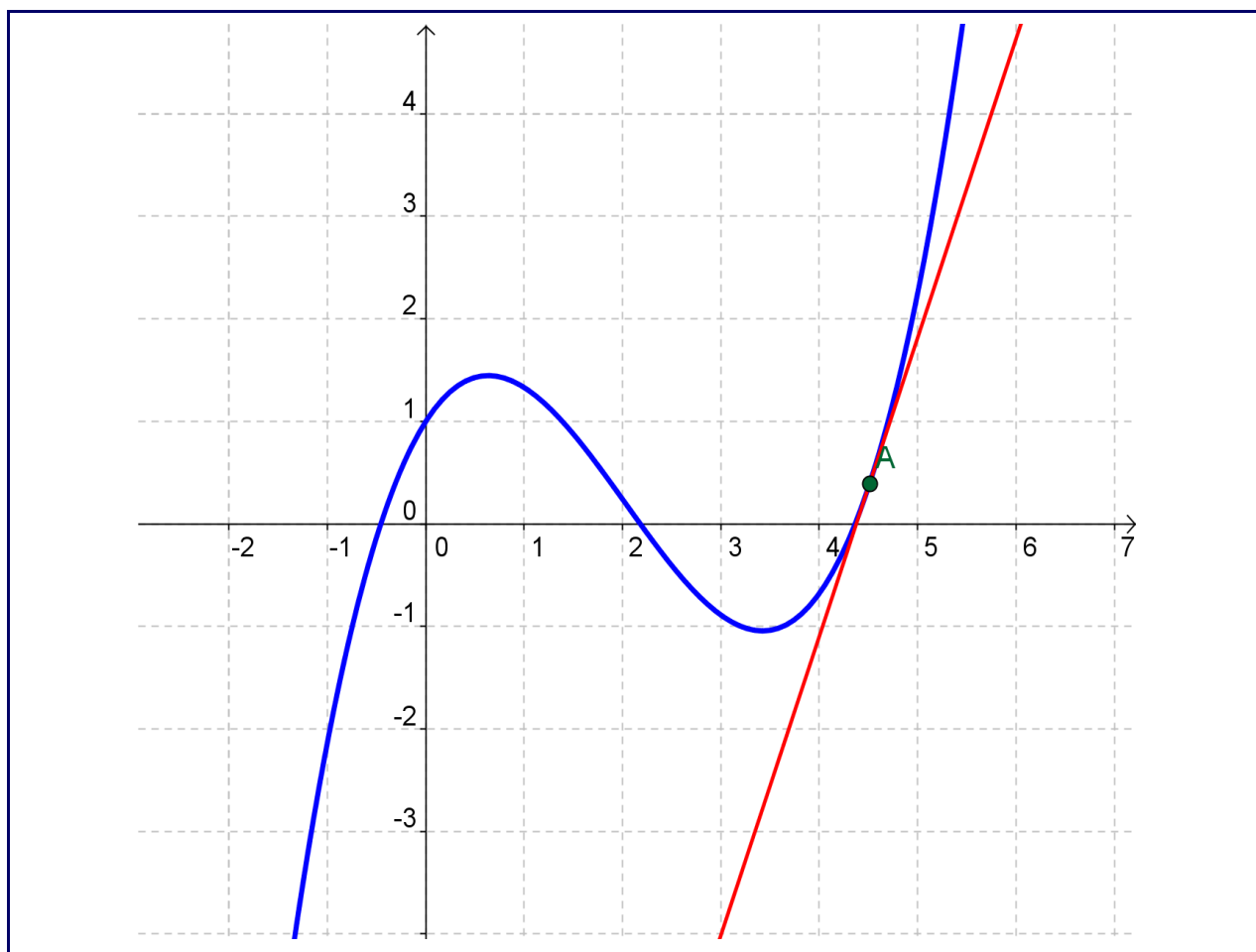


Differentialregning og integralregning



Ikast 2017

Ib Michelsen

Ib Michelsen

Matematik A: Funktioner

Sidst ændret: 29-8-2017

Udskrevet: 17-05-17 16:21:44

C:\Users\Ib\Downloads\Differential- og integralregning (1).odt

17-8: Rettet række til talfølge i overskrift side 10

28-8 Fjernet fejlagtige begrænsninger af sin og cos samt tilføjet omskrivning af cos side 20

25-10: Rettet side 49 ($y > u$)

Indholdsfortegnelse

Introduktion.....	5	Sætning.....	37
Grundbegreber.....	7	Grundsætning	37
Find hældningskoefficienter.....	7	Monotoniforhold og ekstrema.....	38
Konvergens.....	10	Voksende og aftagende funktion....	38
Konvergens af talfølger.....	10	Monotonisætningen.....	38
Grænseværdier.....	11	Den omvendte monotonisætning...	39
Omegn.....	11	Lokale ekstrema.....	39
Grænseværdier.....	11	Optimering.....	41
Kontinuitet.....	12	Fugleburet.....	41
Sætninger om grænseværdier.....	13	Ordrestørrelser.....	42
Tretrinsreglen.....	15	Eksamensopgave 25. maj 2012 (16)....	43
Generelt	15	Eksamensopgave 5. dec. 2014 (12)....	44
Tretrinsreglen.....	15	Eksamensopgave 7. dec. 2015 (11)....	44
Den afledte funktion f'	16	Eksamensopgave 13. aug. 2015 (11)...	44
Afledte funktioner.....	16	Oversigt.....	45
En konstant funktion	16	Integralregning.....	47
En lineær funktion	17	Det ubestemte integral.....	47
Kvadratfunktionen.....	17	Definition af stamfunktion.....	47
Kvadratrodsfunktionen.....	19	Sætning om stamfunktioner (I).....	47
Funktionen $1/x$	19	Sætning om stamfunktioner (II)....	47
Andre funktioner.....	20	Det ubestemte integral, Definition.	48
Potensfunktioner.....	20	Sætninger om stamfunktioner.....	48
Sætning: $\sin'(x) = \cos(x)$	22	Liste over stamfunktioner.....	50
Sætning: $\sin'(x) = \cos(x)$	23	Det bestemte integral.....	51
Regneregler	24	Det bestemte integral	52
Sum af funktioner	24	Det bestemte integral.....	54
Produkt af konstant og funktion ..	24	Definition af DBI I.....	54
Produkt af funktioner	25	Sætning om DBI.....	54
Sammensat funktion, Kædereglen.	26	Definition af DBI II.....	57
Sammensat funktion, Definition....	26	Elementære sætninger.....	57
Kædereglen, Sætning.....	27	Eks.opgaven 14a, stx B, maj 1991....	57
Brøkreger.....	29	Oversigt.....	59
Eksempler på eksamensopgaver (uh)	31	Appendiks.....	60
Tangenter.....	33	Rolles sætning	61
Type 1: kendt x-værdi.....	33	Eksempel I.....	62
Type 2: kendt y-værdi.....	34	Eksempel II.....	62
Type 3: kendt tangenthældning	35	Middelværdisætningen.....	63
En eksamensopgave (mh).....	36	Definition af $\ln(x)$	64
Funktioners monotoniforhold mv.....	37	Sætning $\ln'(x) = 1/x$	64
Et indskud om de reelle tal.....	37	Hjælpesætning.....	64
Intervalruser.....	37	Hovedsætning.....	65
Definition.....	37	Andre logaritmesætninger.....	65

Differential- og integralregning (1)

Definition af e	65
Sætning.....	66
Definition.....	66

Den afledte funktion.....	66
Stikordsregister.....	69

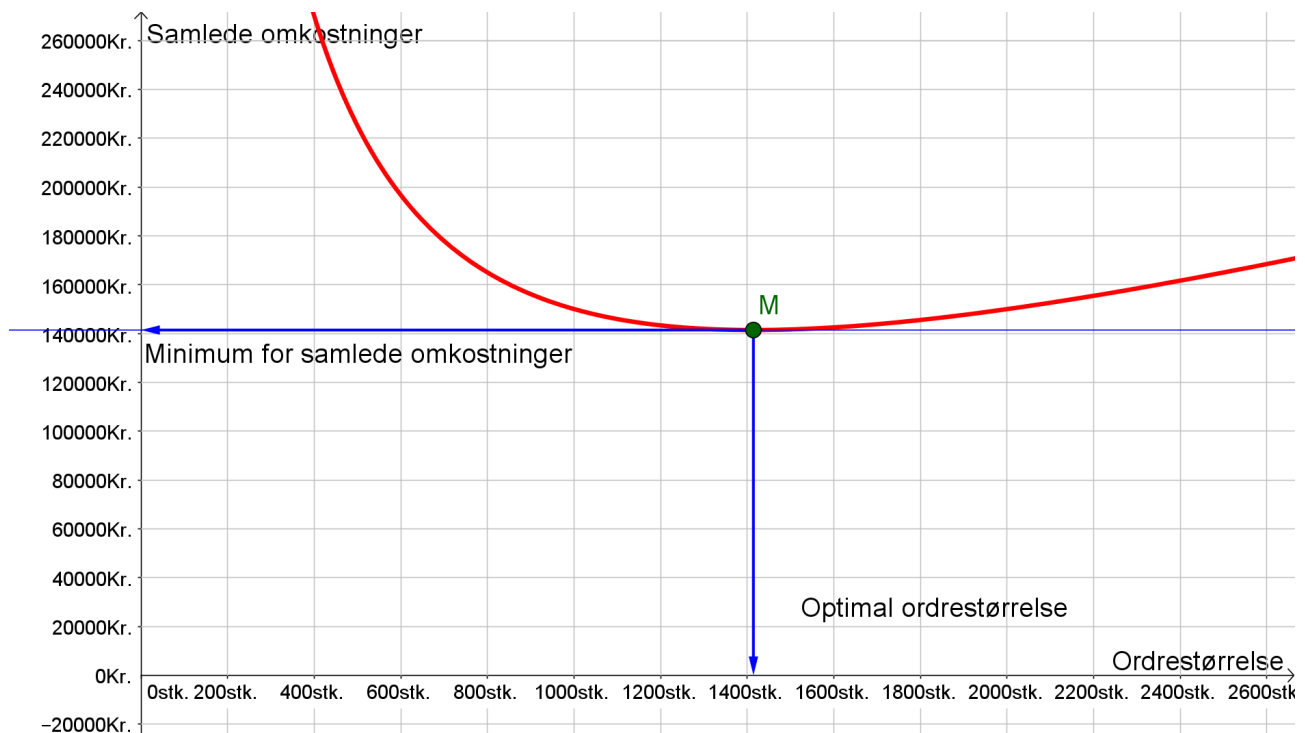
Introduktion

Differentialregning benyttes til at beskrive funktioners vækst: vokser funktionen eller aftager den? Hvor hurtigt foregår det? Har funktionen en størsteværdi eller en mindsteværdi?

I mange af livets forhold er det vigtigt at kunne optimere ved hjælp af en matematisk model som for eksempel når:

- en landmand skal benytte den rigtige mængde kunstgødning for at maksimere dækningsbidraget
- en fabrikant skal producere det rigtige antal vareenheder for at tjene mest muligt
- en dåse skal designses, så materialeforbruget minimeres
- man vil maksimere styrken af et produkt
- og når man skal vælge indkøbsmængde pr. indkøb for at finde den rette balance mellem købsomkostninger og lageromkostninger
- osv.

For de x-værdier hvor y-værdien er størst eller mindst, er der i mange tilfælde en vandret tangent. Med differentialregning kan disse x-værdier findes.

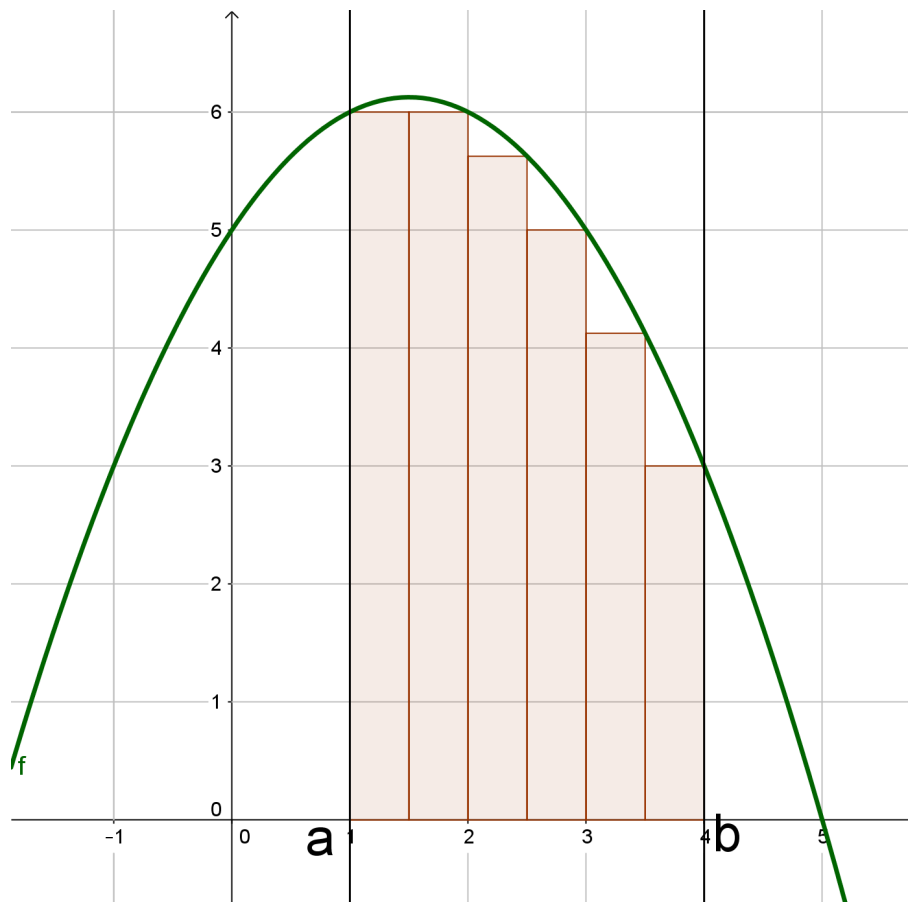


Derfor bliver det at finde tangentens hældning en vigtig opgave.

Integration, som vi benytter det, skyldes Isaac Newton og Gottfried Leibniz, som i slutningen af 1600-tallet uafhængigt af hinanden fik formuleret begreber og sætninger. Det som kaldes "det bestemte integral" blev beskrevet som en uendelig sum af uendelig små størrelser. Integrationstegnet (som Leibniz benyttede) er et langstrakt s som en forkortelse

Differential- og integralregning (1)

af summa eller sum. Ideen var en ide, der havde været længe undervejs: Allerede Arkimedes havde næsten 2000 år tidligere benyttet uendelige summer for fx at finde formelen for en cirkels areal.



Opgaven går ud på at finde arealet mellem en graf og x-aksen og mellem 2 lodrette linjer. Ved at tegne rektangler under grafen mellem de lodrette linjer (her 6), beregne summen af deres arealer, får man et resultat lidt mindre end det søgte (kaldet en undersum.) Man kunne også have ladet rektanglerne være lidt større og dække arealet fuldstændigt og fået et lidt for stort resultat. Men ved at lave uendeligt mange rektangler og gøre dem uendeligt små, kan arealet findes som en grænseværdi (af summen af rektanglernes arealer.)

Med Leibniz skrivemåde fås det ovenstående areal som: $\int_a^b f(x) dx$

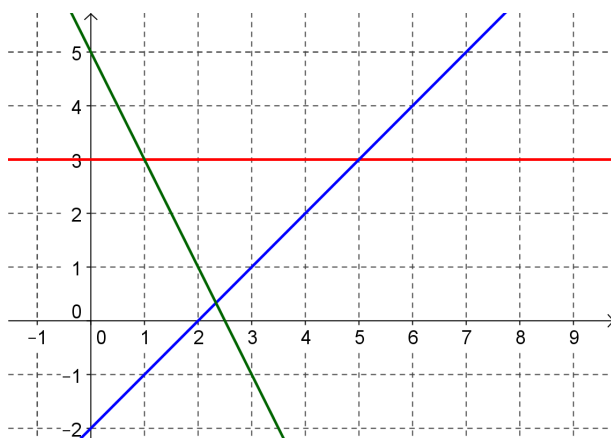
Grundbegreber

Find hældningskoefficienter

Find hældningskoefficienter ved aflæsning

Øvelse 1

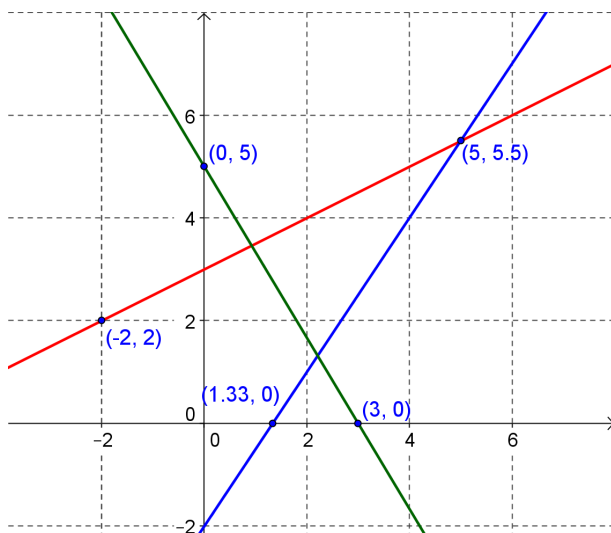
- Find hældningskoefficienterne for de tre rette linjer.
- Svar:
 - Blå linje
 - Rød linje
 - Grøn linje



Find hældningskoefficienter ved beregning

Øvelse 2

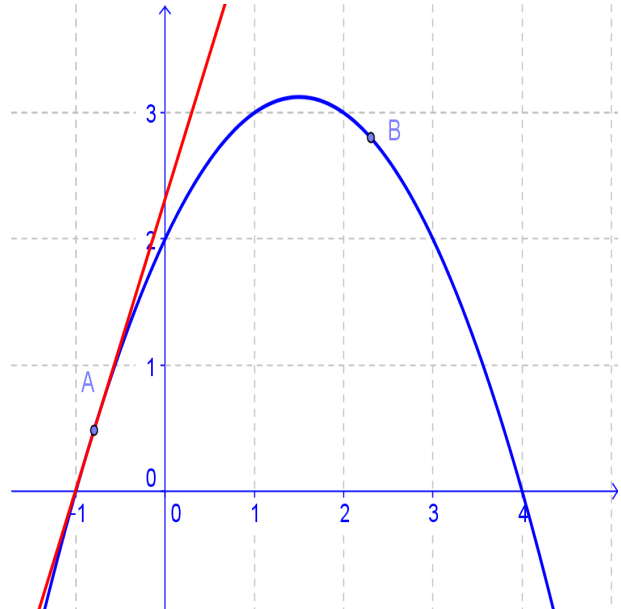
- Find hældningskoefficienterne for de tre rette linjer.
- Svar:
 - Blå linje
 - Rød linje
 - Grøn linje



Find tangenthældninger for tangenter i A og B

Øvelse 3

- Find hældningskoefficienten for den røde tangent (i A)
- Tegn tangenten i B
- Find hældningskoefficienten for tangenten i B)

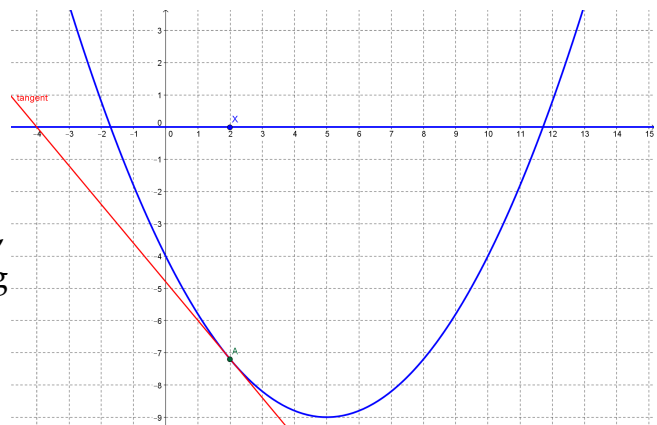


Tangenthældningen som en funktion af x (1)

Øvelse 4

På tegningen af en parabel er der tegnet en tangent i $A(3, f(3))$.

- Find tangentens hældningskoefficient
- Tegn 6 - 9 andre punkter på grafen, tegn tangenterne i disse punkter og find deres hældningskoefficienter



- Udfyld en tabel som nedenstående

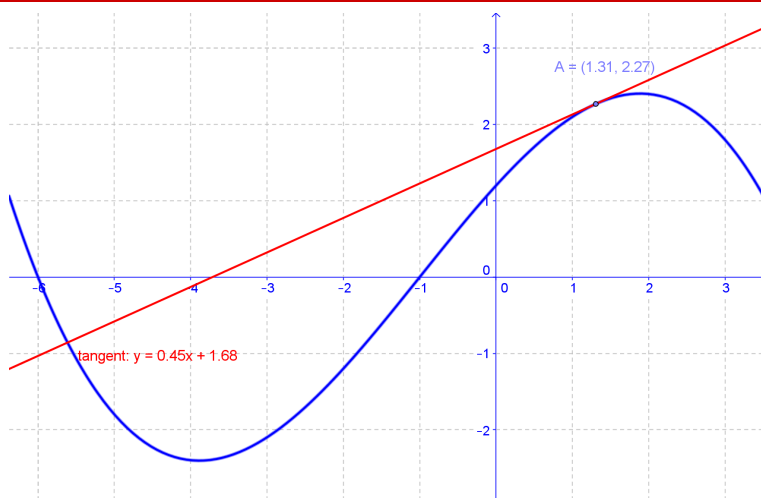
x (i tangentens røringspunkt)									
Tangenthældning									

- Indtast punkterne i GeoGebra og find en funktion, der kan beskrive sammenhængen mellem x -værdierne og tangenthældningerne.

Tangenthældningen som en funktion af x (2)

Øvelse 5

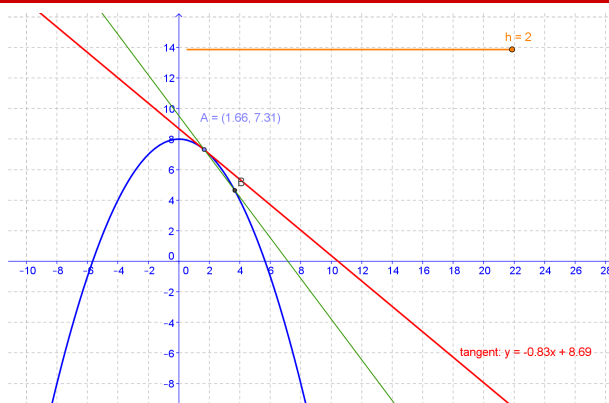
- Indtast i GeoGebra funktions-forskriften for $f(x) = \frac{(x+6)(x+1)(4-x)}{20}$
- Indsæt A som et punkt på grafen og tegn tangenten (med tangentværktøjet!).
- Vælg for begge: Vis navn og værdi.
- Find samhörørende værdier af $x(A)$ og tangenthældningen.
- Med ca. 10 talpar laves en liste af punkter ...
- Kan du se sammenhængen?



Tangent og sekant

Øvelse 6

- Tegn grafen til højre i GeoGebra, idet $f(x) = 8 - \frac{x^2}{4}$
- Lad A være et punkt på grafen
- Lad h være en skyder i intervallet $[-2, 2]$ med tilvækst = 0,01 og bredde = 500 px.
- Definer B som: $B = (x(A)+h, f(x(A)+h))$
- Tegn en linje (sekanten) gennem A og B .
- Flyt skyderen og bemærk, at jo tættere h er på nul, jo "tættere" er tangent og sekant på hinanden.
- Sæt $h = 0$ (enten med skyder eller ved indtastning). Bemærk, at linjen ikke kan tegnes! hvorfor?
- Indtast en meget lille værdi for h : $h = 0,00001$. Zoom ind på A . Hvad ser du?



Konvergens

Konvergens af talfølger

En talfølge (a_n) konvergerer mod a , hvis og kun hvis der for et vilkårligt lille $\varepsilon > 0$ findes et naturligt tal $N > 0$, så $|a_n - a| < \varepsilon$ for alle $n > N$.

Eksempel

Lad talfølgen (a_n) være defineret ved $a_n = 1/n$. Talfølgen vil så konvergere mod $a = 0$, da:

- Vælg fx ε som $1/100$. $|a_n - a| = |1/n - 0| = 1/n$
 - $1/n < 1/100 \Leftrightarrow 1 < \frac{n}{100} \Leftrightarrow 100 < n$
 - Dvs: vælges $N = 100$, er betingelsen opfyldt.
- Vælg et vilkårligt ε . $|a_n - a| = |1/n - 0| = 1/n$
 - $1/n < \varepsilon \Leftrightarrow 1 < n \cdot \varepsilon \Leftrightarrow 1/\varepsilon < n$
 - Dvs: vælges $N = 1/\varepsilon$, er betingelsen opfyldt; skulle N ikke være et helt tal oprundes det til et helt tal.

Øvelse 7

- For hvilke værdier af a er talfølgen konvergent, hvor
 - $a_n = \frac{a^n - 1}{a - 1}$?

Grænseværdier

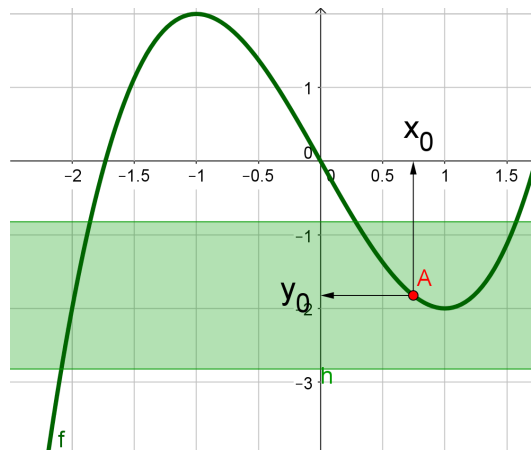
Omegn

Intervall $[a-\delta, a+\delta]$ kaldes en omegn (omkring a). Det betegnes $\omega(a)$.

Mængden $[a-\delta, a+\delta] \setminus \{a\}$ kaldes den udprikkede omegn. Den betegnes $\omega'(a)$.

Eksempel

1. På tegningen til højre ses grafen for funktionen f og punktet $A=(x_0, y_0)$. Vi vil undersøge: hvad sker der med funktionsværdierne for f , når x -værdierne kommer tættere og tættere på x_0 .
2. I det grønne bælte ligger alle y -værdierne i et interval: , altså i en omegn om y_0 (som vi kan kalde $\omega(y_0)$). Findes der en omegn om x_0 således, at i denne omegn er alle funktionsværdierne indeholdt i $\omega(y_0)$? Det svarer jo til, at en lille stump af grafen på hver side af A skal ligge i det grønne bælte.
3. Hvis der findes sådan en udprikket omegn om x_0 ($\omega'(x_0)$) lige meget hvor smalt det grønne bælte bliver, siger vi at $f(x)$ nærmer sig y_0 , når x nærmer sig x_0 .
4. Dette vil vi nu formalisere herunder i definitionerne.



Matematiske symboler

$\forall$ kaldes alkvantor og betyder og læses "det gælder for alle". Se eksempler på anvendelsen herunder.

$\exists$ kaldes eksistenskvantor og betyder "der findes / eksisterer".

$x \in I$ læses: elementet x (som fx kan være et reelt tal) tilhører (dvs. er en del af eller et element i) mængden I (som fx kan være et interval.)

Grænseværdier

Grænseværdien for $f(x)$, når x nærmer sig x_0 , betegnes $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ¹

¹ Oftest skrives *lim* i stedet for *limes*. Ordet betyder grænse; sammenlign med engelsk: limit.

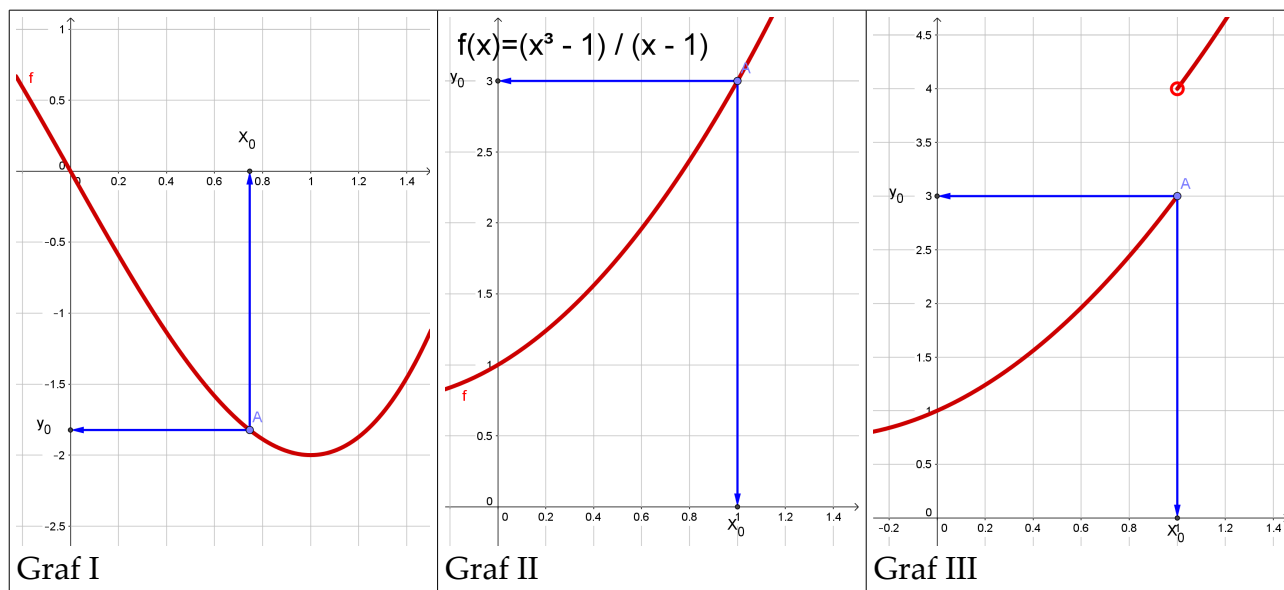
Differential- og integralregning (1)

Grænseværdien eksisterer og er y_0 , hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall \omega(y_0): \exists \omega'(x_0): x \in \omega'(x_0) \Rightarrow f(x) \in \omega(y_0)$$

Sidste linje læses: Det gælder for alle omegne omkring y_0 , at der findes en udpræget omegn omkring x_0 , således at: Hvis x tilhører denne udprægede omegn, tilhører $f(x)$ omegnen omkring y_0 (lige meget hvor djævelsk lille den måtte være:-)

3 eksempler



1. Den 1. graf er sammenhængende: Punktet A ligger på grafen og $f(x_0) = y_0$ og grænseværdien for $f(x) = f(x_0)$. Funktionen siges at være kontinuert i x_0 . Og da den er kontinuert for alle x -værdier, siges funktionen at være kontinuert.
2. Den anden graf er ikke sammenhængende: funktionen er diskontinuert. Bemærk, at for $x_0 = 1$ kan funktionsværdien ikke beregnes! Men funktionen har tydeligvis en grænseværdi, når x nærmer sig 1: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.
3. Den tredje funktion laver et spring ved $x = 1$. $f(1) = 3$, men for alle bare lidt større x -værdier, er de tilsvarende funktionsværdier større end 4. Her har funktionen ikke en grænseværdi, når x nærmer sig 1.

Kontinuitet

f er kontinuert i x_0 , hvis og kun hvis der for vilkårligt lille $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$, så $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ for alle x , hvor $|x - x_0| < \delta$.

Hvis f er kontinuert for alle x i definitionsmængden, siges (funktionen) f at være kontinuert.

Øvelse 8

- Formuler den første del af definitionen med benyttelse af matematiske symboler.
- Formuler den første del af definitionen med benyttelse af omegne.

Øvelse 9

- Undersøg betydningen af kontinuitet ved at eksperimentere på hjemmesiden:
 - <https://www.geogebra.org/m/JKBGMzAU>

Sætninger om grænseværdier

Vi forudsætter, at for funktionerne f og g gælder, at der findes en udprikket omegn, så $x \in \omega'(x_0) \Rightarrow m_f < f(x) < M_f \wedge m_g < g(x) < M_g$. Endvidere forudsættes, at begge

funktioner har grænseværdier for $x \rightarrow x_0$. Lad

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta$$

Så følger

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = \alpha + \beta$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - g(x) = \alpha - \beta$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \alpha$ (idet $k \in \mathbb{R}$)
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta$
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ (forudsat $\beta \neq 0$)

Bevis for 1.

Givet et ε skal vi finde et δ , således at: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$.

Da begge funktioner har de nævnte grænseværdier, kan vi finde et δ , således at $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon/2$ og $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - \beta| < \varepsilon/2$.

For denne værdi af δ gælder så:

$$|(f(x) + g(x)) - (\alpha + \beta)| = |(f(x) - \alpha) + (g(x) - \beta)| \leq |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

QED

Overvej, hvorfor uligheden gælder. Start fx med eksempler som: $|4 + 3|$ og $|4 - 3|$.

Øvrige beviser overlades til læseren.

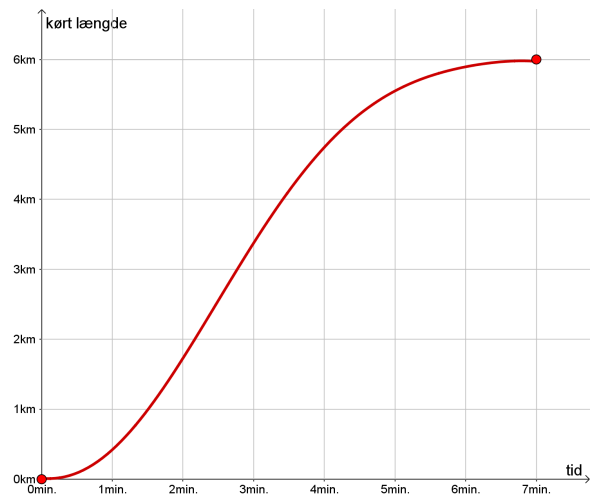
Tretrinsreglen

Generelt

Et Eksempel

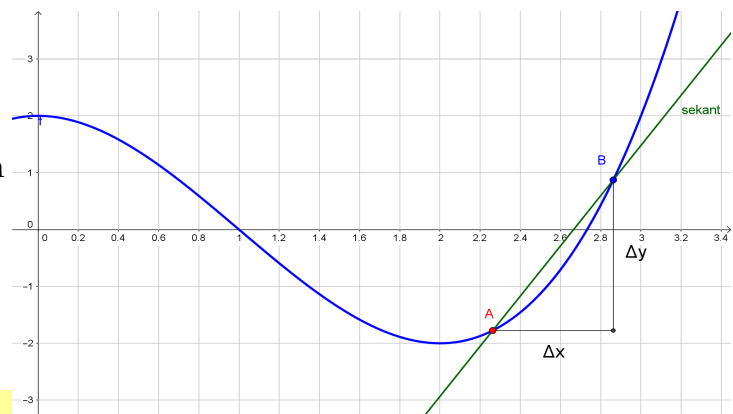
Her er en graf, der viser sammenhængen mellem køretid og kørt længde. Vi kan sagtens beregne en gennemsnitlig hastighed for den kørte strækning: 6/7 km pr. minut. Vi kan også sagtens se, at hastigheden har været varierende, men vi kan ikke umiddelbart svare på, hvad hastigheden har været i et bestemt øjeblik, da vi ikke kan få to målinger i et øjeblik.

Men hvis vi kunne erstatte grafen på et lille bitte stykke med tangenten ...



Tretrinsreglen

Opgaven er at finde tangenthældningen i $A(x_0, y_0)$. Den kan ikke beregnes umiddelbart, men det kan sekanthældningen for sekanter gennem A og et nabopunkt i en udpræget omegn: $\omega'(x_0)$.



Definition af tangenthældningen

Hvis sekanthældningen har en grænseværdi for $x \rightarrow x_0$ er den tangentens hældningskoefficient og tangenten er linjen gennem A med denne hældningskoefficient. Hældningskoefficienten kaldes også *differentialkvotienten* i x_0 .

Metode

I. Beregning af Δy

- Med udgangspunkt i A , der har x-værdien x_0 findes nabopunktet B på grafen med x-værdien $x_0 + \Delta x$. Første trin går ud på at beregne funktionstilvæksten $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
- Oftentimes vælger man at sætte $\Delta x = h$
- Ved beregning af Δy for en bestemt funktion bruges denne og differensen kan evt. omskrives eller forenkles.

II. Beregning af sekanthældningen

- Sekanthældningen beregnes om $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
- Også her i dette trin omskrives eller reduceres udtrykket

III. Beregning af sekanthældningens grænseværdi (tangentens hældningskoefficient)

- Grænseværdien betegnes $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ (hvis den eksisterer)
- Grænseværdien findes ved at benytte den viden, man har om de indgående størrelser: kontinuitet, differentiability mv. og grænseværdisætningerne (side 13).
- Også her i dette trin kan udtrykket omskrives eller reduceres

Den afledte funktion f'

Lad f være defineret i et åbent interval I . Hvis differentialkvotienten eksisterer for ethvert x i intervallet, er der defineret en funktion $x \rightarrow f'(x)$.

Funktionen kaldes den afledte funktion og betegnes f' .

Bemærk at $(f')' = f''$. Tilsvarende kan fås f''' , f'''' osv.

Afledte funktioner

En konstant funktion

$$f(x) = k$$

I. Beregning af Δy

- $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = k - k = 0$

II. Beregning af sekanthældningen

- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{h} = 0$

III. Beregning af sekanthældningens grænseværdi (tangentens hældningskoefficient)

- $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$
- $f'(x) = 0$

En lineær funktion

$$f(x) = ax + b$$

I. Beregning af Δy

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = (a(x_0 + h) + b) - (ax_0 + b) \Leftrightarrow \\ \Delta y &= ax_0 + ah + b - ax_0 - b = ah \end{aligned}$$

II. Beregning af sekanthældningen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ah}{h} = a$$

III. Beregning af sekanthældningens grænseværdi (tangentens hældningskoefficient)

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} a = a$$

$$f'(x) = a$$

Kvadratfunktionen

$$f(x) = x^2$$

I. Beregning af Δy

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)^2 - x_0^2 = x_0^2 + h^2 + 2x_0 \cdot h - x_0^2 = h^2 + 2x_0 \cdot h \end{aligned}$$

II. Beregning af sekanthældningen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h^2 + 2x_0 \cdot h}{h} = h + 2x_0$$

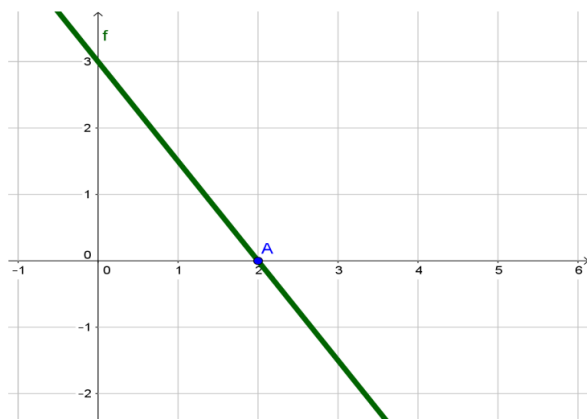
III. Beregning af sekanthældningens grænseværdi (tangentens hældningskoefficient)

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 2x_0 = \lim_{h \rightarrow 0} h + \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 = 0 + 2x_0 = 2x_0$$

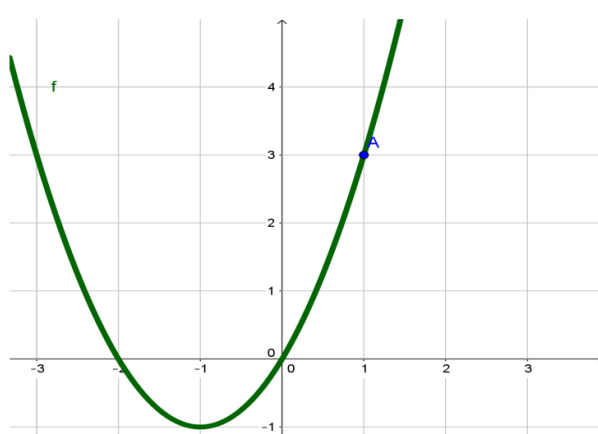
$$f'(x) = 2x$$

Øvelse 10

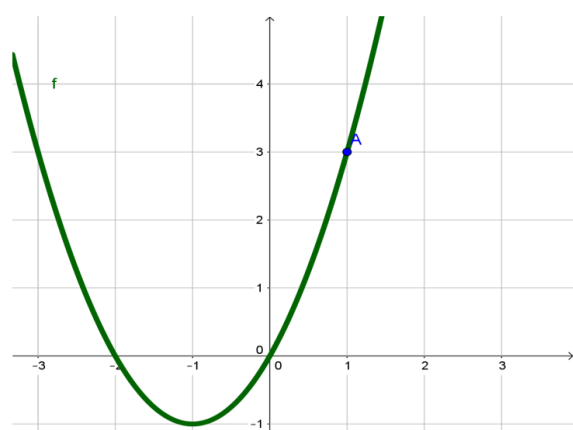
- Benyt tretrinsreglen til at finde $f'(x_0)$ og tegn tangenten i A (i alle de 6 delopgaver. Beregn hver gang først $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$



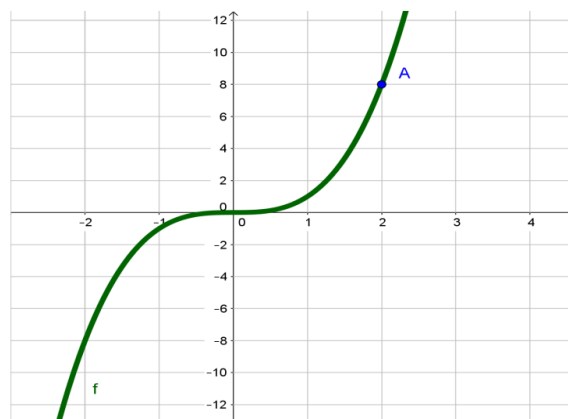
$$f(x) = -1,5x + 3$$



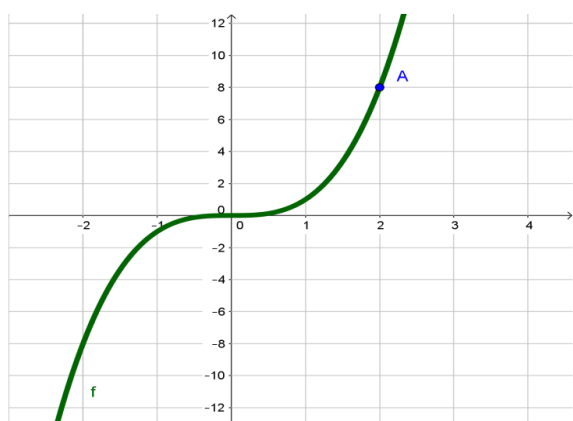
$$f(x) = x^2 + 2x$$



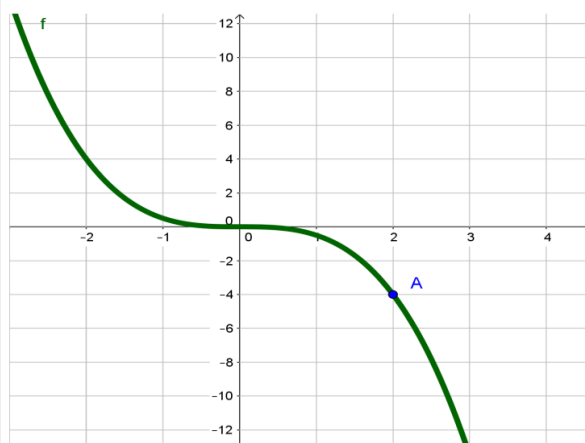
$$f(x) = x^2 + 2x, \quad A = (x_0, f(x_0))$$



$$f(x) = x^3$$



$$f(x) = x^3, \quad A = (x_0, f(x_0))$$



$$f(x) = -0,5x^3, \quad A = (x_0, f(x_0))$$

Kvadratrodsfunktionen

$$f(x) = \sqrt{x}$$

I. Beregning af Δy

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}$$

II. Beregning af sekanthældningen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} = \frac{(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}{h \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x_0 + h})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{h \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \frac{(x_0 + h) - x_0}{h \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \frac{h}{h \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}$$

III. Beregning af sekanthældningens grænseværdi (tangentens hældningskoefficient)

$$\circ \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} 1}{\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \Leftrightarrow$$

$$\bullet \quad f'(x_0) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0}}$$

$$\circ \quad f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Funktionen $1/x$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

I. Beregning af Δy

$$\bullet \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow$$

$$\bullet \quad \Delta y = \frac{1 \cdot x_0}{(x_0 + h) \cdot x_0} - \frac{1 \cdot (x_0 + h)}{x_0 \cdot (x_0 + h)} = \frac{x_0 - x_0 - h}{x_0 \cdot (x_0 + h)} = \frac{-h}{x_0 \cdot (x_0 + h)}$$

II. Beregning af sekanthældningen

$$\circ \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{-h}{x_0 \cdot (x_0 + h)}}{h} = \frac{-h}{x_0 \cdot (x_0 + h) \cdot h} = \frac{-1}{x_0 \cdot (x_0 + h)}$$

III. Beregning af sekant-hældningens grænseværdi (tangentens hældningskoefficient)

$$\begin{aligned} \circ \quad f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0 \cdot (x_0 + h)} = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} -1}{\lim_{h \rightarrow 0} x_0 \cdot (x_0 + h)} = \frac{-1}{x_0^2} \\ \circ \quad f'(x) &= \frac{-1}{x^2} \end{aligned}$$

Andre funktioner

Logaritmefunktionen $\ln$

- $f(x) = \ln(x) \quad x > 0$
- $f'(x) = \frac{1}{x}$

Eksponentialfunktionen

- $f(x) = e^x$
- $f'(x) = e^x$

Sinusfunktionen

- $f(x) = \sin(x)$
- $f'(x) = \cos(x)$

Cosinusfunktionen

- $f(x) = \cos(x)$
- $f'(x) = -\sin(x)$

Beviser for andre funktioner udskydes; sætningen for sinusfunktionen bevises dog sidst i kapitlet her (side 22.) Med anvendelse af kædereglen (side 26) følger sætningen for cosinus umiddelbart, idet $f(x) = \cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$.

Potensfunktioner

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n, \quad n \geq 1 \\ f'(x) &= n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

2 Beviset for den naturlige logaritmefunktions afledte funktion findes side 64.

Bevis

Sætningen bevises som et induktionsbevis: I stedet for at bevise sætningen for de uendeligt mange hele tal 1, 2, 3 ... bevises

- sætningen er sand for $n = 1$ og
- påstanden: hvis sætningen er sand for n er den også sand for det næste hele tal: $n+1$.

(Hvis vi ved, sætningen er sand for $n=1$ sammen med den sidste påstand, er sætningen også rigtig for $n=1+1=2$. Når sætningen er rigtig for $n=2$, er den også rigtig for $n=3$. Osv.

Det, at man kan bevise sætninger på denne måde, kaldes Induktionsaksiomet. Det er altså en grundsætning, som vi kender dem fra Euklid, og som ikke kan eller skal bevises.)

Del I

(*) Vi vil gerne vise $(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1}$ ³

$f(x) = x^1$ er den lineære funktion med hældningskoefficienten $a=1$ og $b=0$; vi har tidligere vist, at den afledte funktion for en lineær funktion er $f'(x) = a$ og i dette tilfælde er $a=1$.

Dvs. at venstre side er 1.

Men højre side er $1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$

Begge sider af ligningen (*) er 1 og ligningen er altså sand. Dermed er del I bevist.

Del II

Det antages, at sætningen er sand for n ; dvs.

(**) $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ gælder.

Vi vil vise, at sætningen også gælder for $(n+1)$. Hertil benyttes produktreglen (som kommer nogle sider længere fremme på side 25, men er bevist uafhængigt af denne sætning.)

Lad $g(x) = x^{n+1}$

(***) Vi vil så vise, at $g'(x) = (n+1)x^{(n+1)-1}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^{n+1})' \Leftrightarrow \\ g'(x) &= (x^1 \cdot x^n)' \Leftrightarrow \\ g'(x) &= (x^1)' \cdot x^n + x^1 \cdot (x^n)' \Leftrightarrow \\ g'(x) &= 1 \cdot x^n + x^1 \cdot n \cdot x^{n-1} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= x^n + n \cdot x^{n-1+1} \Leftrightarrow \\ g'(x) &= x^n + n \cdot x^n \Leftrightarrow \\ g'(x) &= (n+1) \cdot x^n \Leftrightarrow \\ g'(x) &= (n+1) \cdot x^{(n+1)-1} \end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist.

³ Hvis $f(x) = x^1$, er $f'(x) = (f(x))' = (x^1)'$. Det sidste er blot forskellige skrivemåder for den afledte funktion og bruges generelt.

Øvelse 11

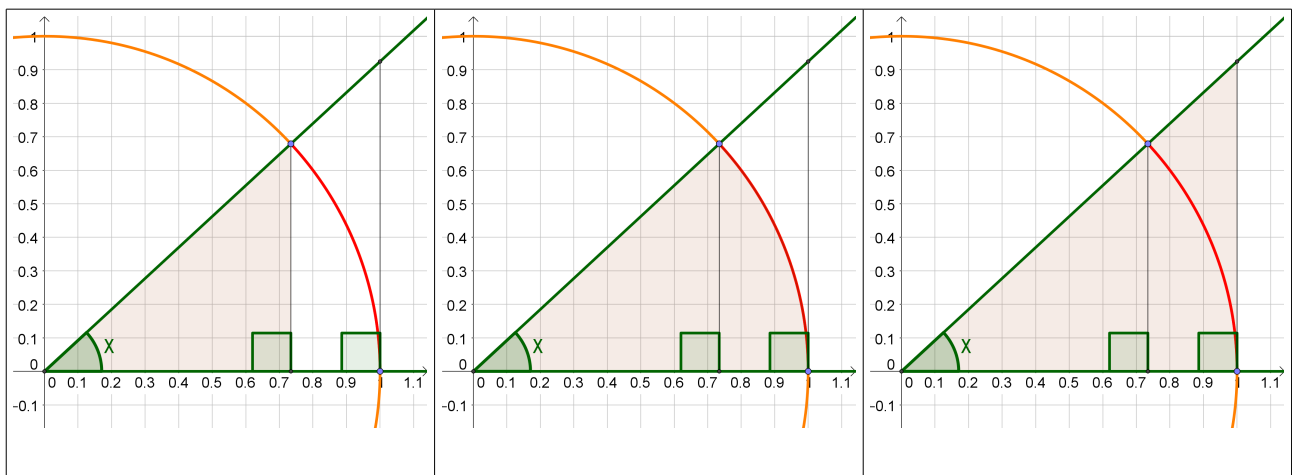
- Hvorfor er alle omskrivninger rigtige i beviset herover? Noter argumenter!

Sætning: $\sin'(x) = \cos(x)$

Hjælpesætning 1

Vi vil først vise: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ for $x \rightarrow 0$

Det ses nemt på figurerne herunder, at arealerne bliver større fra venstre mod højre.



Derfor kan der opstilles følgende dobbeltulighed:

$$\frac{\cos(x) \cdot \sin(x)}{2} \leq \pi \cdot \frac{x}{2\pi} \leq \frac{\tan(x)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\cos(x) \cdot \sin(x) \leq x \leq \tan(x) \Leftrightarrow$$

$$\cos(x) \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

Lader vi x gå mod nul fås grænseværdierne:

$$\cos(0) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(0)} \Leftrightarrow \text{hvoraf ses}$$

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1 \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{for} \quad x \rightarrow 0$$

Hjælpesætning 2

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0 \quad \text{for } h \rightarrow 0$$

Bevis

Af omskrivningen her, følger sætningen umiddelbart:

$$\frac{1 - \cos(h)}{h} = \frac{1 - \cos(h)}{h} \cdot \frac{1 + \cos(h)}{1 + \cos(h)} = \frac{1 - \cos^2(h)}{h \cdot (1 + \cos(h))} = \frac{\sin^2(h)}{h \cdot (1 + \cos(h))} = \frac{\sin(h)}{h} \cdot \frac{\sin(h)}{(1 + \cos(h))}$$

- Gennemfør beviset med alle argumenter

Sætning: $\sin'(x) = \cos(x)$

$$f(x) = \sin(x) \quad ^4$$

I. Beregning af Δy

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = \sin(x_0 + h) - \sin(x_0) = \\ &= \sin(x_0) \cdot \cos(h) + \cos(x_0) \cdot \sin(h) - \sin(x_0) = \sin(x_0)[\cos(h) - 1] + \cos(x_0) \cdot \sin(h) \end{aligned} \quad ^5$$

II. Beregning af sekanthældningen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x_0)[\cos(h) - 1] + \cos(x_0) \cdot \sin(h)}{h} = \sin(x_0) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x_0) \cdot \frac{\sin(h)}{h}$$

III. Beregning af sekanthældningens grænseværdi (tangentens hældningskoefficient)

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin(x_0) \cdot 0 + \cos(x_0) \cdot 1 = \cos(x_0)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

Øvelse 12

- Beregn $\cos'(x)$
 - Tip: Benyt, at $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$
- Beregn $\tan'(x)$
 - Tip: Benyt funktionens definition

⁴ Alternativt bevis: https://www.lmfk.dk/artikler/data/artikler/1203/1203_17.pdf

⁵ Ved omskrivningen er der benyttet additionssætningerne for trigonometriske funktioner.

Regneregler

Sum af funktioner

Lad $f(x)$ og $g(x)$ være differentiable funktioner og definer sumfunktionen som $s(x) = f(x) + g(x)$

I. Beregning af Δy

- $\Delta y = s(x_0 + \Delta x) - s(x_0) = s(x_0 + h) - s(x_0) \Leftrightarrow$
 $\Delta y = (f(x_0 + h) + g(x_0 + h)) - (f(x_0) + g(x_0)) = (f(x_0 + h) - f(x_0)) + (g(x_0 + h) - g(x_0)) \Leftrightarrow$
- $\Delta y = \Delta f + \Delta g$

II. Beregning af sekanthældningen

- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f + \Delta g}{h} = \frac{\Delta f}{h} + \frac{\Delta g}{h}$

III. Beregning af sekanthældningens grænseværdi (tangentens hældningskoefficient)

$$s'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} + \frac{\Delta g}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{h} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

- $s'(x) = f'(x) + g'(x)$

Produkt af konstant og funktion

Lad $f(x)$ være en differentiable funktion og $c \in \mathbb{R}$. Definer produktfunktionen som $k(x) = c \cdot f(x)$

I. Beregning af Δy

- $\Delta y = k(x_0 + \Delta x) - k(x_0) = k(x_0 + h) - k(x_0) = c \cdot f(x_0 + h) - c \cdot f(x_0) \Leftrightarrow$
- $\Delta y = c \cdot (f(x_0 + h) - f(x_0)) = c \cdot \Delta f$

II. Beregning af sekanthældningen

- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c \cdot \Delta f}{h} = c \cdot \frac{\Delta f}{h}$

III. Beregning af sekanthældningens grænseværdi (tangentens hældningskoefficient)

- $k'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} c \cdot \frac{\Delta f}{h} = c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} = c \cdot f'(x_0)$

- $k'(x) = c \cdot f'(x)$

Produkt af funktioner

Lad $f(x)$ og $g(x)$ være differentiable funktioner og definer produktfunktionen som $p(x) = f(x) \cdot g(x)$

I. Beregning af Δy

- $\Delta y = p(x_0 + \Delta x) - p(x_0) = p(x_0 + h) - p(x_0) = f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0) =$
- $f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - \cancel{f(x_0) \cdot g(x_0 + h)} + \cancel{f(x_0) \cdot g(x_0 + h)} - f(x_0) \cdot g(x_0) =$
- $(f(x_0 + h) - \cancel{f(x_0)}) \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot (\cancel{g(x_0 + h)} - g(x_0)) =$
- $\Delta f \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot \Delta g$

II. Beregning af sekanthældningen

- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot \Delta g}{h} = \frac{\Delta f \cdot g(x_0 + h)}{h} + \frac{f(x_0) \cdot \Delta g}{h} =$
- $\frac{\Delta f}{h} \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot \frac{\Delta g}{h} =$

III. Beregning af sekanthældningens grænseværdi (tangentens hældningskoefficient)

- $p'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot \frac{\Delta g}{h} =$

$$f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

- Grænseværdien fås med sætninger for grænseværdier af sum og produkt, idet sekanthældningernes grænseværdier fås som differentilkvotienterne, da f og g er differentiable, grænseværdien for $g(x_0 + h)$ fås som $g(x_0)$, da differentiable funktioner også er kontinuerte, og endelig er $f(x_0)$ en konstant (med grænseværdien $f(x_0)$).
- $p'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Sammensat funktion (Kædereglen)

Definition af en sammensat funktion

Lad f og g være to funktioner, hvor $VM(g) \subseteq DM(f)$. Defineres h som:

$$h(x) = f(g(x)), x \in DM(g)$$

kaldes h den sammensatte funktion, f den ydre funktion og g den indre funktion.

En kort skrivemåde for en sammensat funktion er:

$$h = f \circ g$$

hvilket læses: f bolle g .

Epsilonfunktionen

En epsilonfunktion

 $\epsilon(x)$ er en funktion,

hvor $\epsilon(0)=0$ og

$$\epsilon(x) \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow 0 \quad \text{samnt}$$

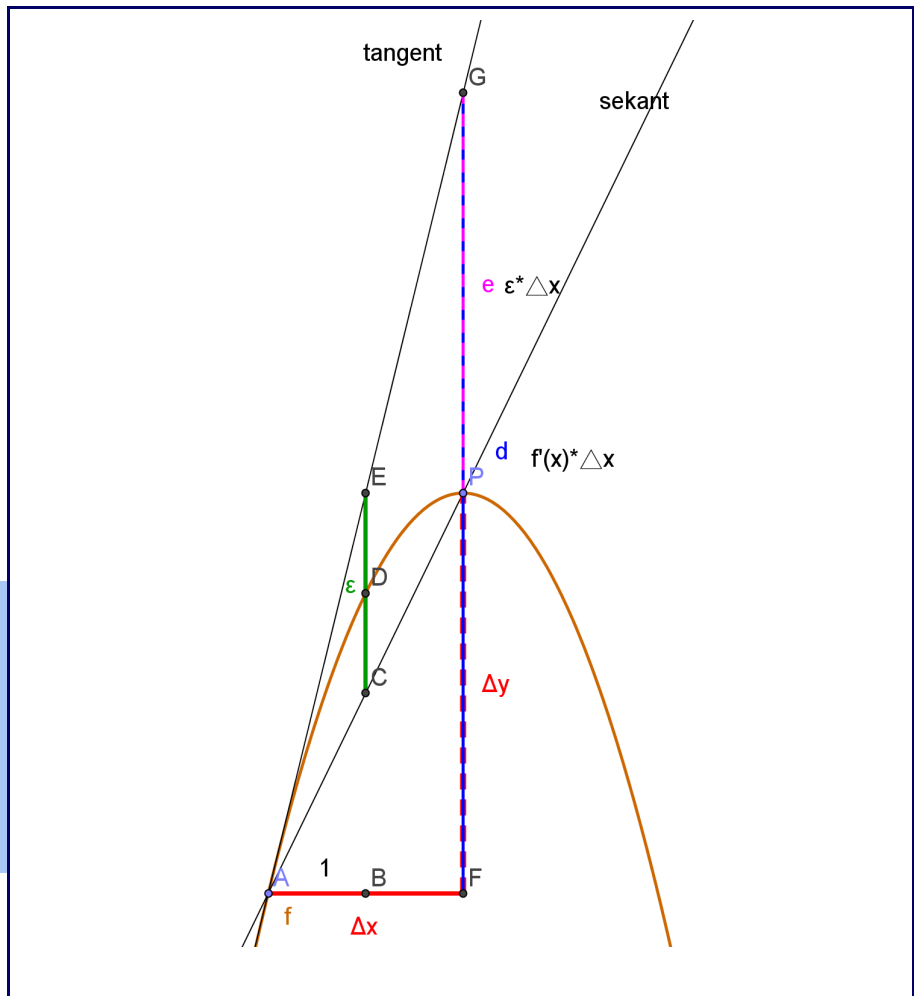
$DM(\epsilon)$ er et åbent interval indeholdende 0.

Hjælpesætning

f er differentiabel, hvis og kun hvis Δy kan skrives:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \epsilon(x) \cdot \Delta x$$

hvor ϵ er en epsilon-funktion.



Bevis

Hvis f er differentiabel, har hældningskoefficienten for sekanten en grænseværdi: $f'(x) :$

De første linjer forudsætter, at $\Delta x \neq 0$, men i de sidste linjer gælder ligningerne også for $\Delta x = 0$.

Differential- og integralregning (1)

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &\rightarrow f'(x) \Leftrightarrow \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= f'(x) + \epsilon(\Delta x) \Leftrightarrow \\ \Delta y &= f'(x) \cdot \Delta x + \epsilon(\Delta x) \cdot \Delta x \Leftrightarrow \\ f(x + \Delta x) &= f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + \epsilon(\Delta x) \cdot \Delta x\end{aligned}$$

Bemærkning

Dette betyder, at vi kan benytte en alternativ definition på differentialkvotienten: Differentialkvotienten i x_0 er det tal $f'(x_0)$, hvor $f(x)$ kan skrives som:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \epsilon(x - x_0) \cdot (x - x_0)$$

Det kan "let" vises, at $f'(x_0)$ er entydigt bestemt: Der findes ikke 2 forskellige $f'(x_0)$.

Kædereglen (Sætning)

Lad $h = f \circ g$, hvor f og g er differentiable funktioner. Så er h en differentiable funktion og $h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Bevis

Da funktionerne er differentiable, gælder

$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0) \cdot (y - y_0) + \epsilon_f(y - y_0) \cdot (y - y_0) \quad (1)$$

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) + \epsilon_g(x - x_0) \cdot (x - x_0) \quad (2)$$

Lad $g(x) = y$ og $g(x_0) = y_0$; så fås:

$$\begin{aligned}h(x) &= f(g(x)) = \\ f(g(x_0)) &+ f'(g(x_0)) \cdot (g(x) - g(x_0)) + \epsilon_f(g(x) - g(x_0)) \cdot (g(x) - g(x_0)) \Leftrightarrow\end{aligned} \quad (3)$$

hvor det første følger af definition af sammensat funktion og det næste benytter (1). Nu benyttes definitione af h og (2) til næste omskrivning:

$$\begin{aligned}h(x) &= h(x_0) + f'(g(x_0)) \cdot [g'(x_0) \cdot (x - x_0) + \epsilon_g(x - x_0) \cdot (x - x_0)] + \\ &\quad \epsilon_f(g(x) - g(x_0)) [g(x) - g(x_0)] = \\ &h(x_0) + f'(g(x_0)) \cdot [g'(x_0) \cdot (x - x_0)] + \\ &\quad f'(g(x_0)) \cdot [\epsilon_g(x - x_0) \cdot (x - x_0)] + \\ &\quad \epsilon_f(g(x) - g(x_0)) [g(x) - g(x_0)] \Leftrightarrow\end{aligned} \quad (4)$$

$f'(g(x_0))$ er i 3. og fjerde linje multipliceret med begge led i den kantede parentes. Summen af de to sidste led (i 4. og 5. linje) er en epsilonfunktion. Det følger af 1) at summen af epsilonfunktioner er en epsilonfunktion og 2) produktet af en epsilonfunktion

og en begrænset funktion er en epsilonfunktion.

Bemærk, at den sammenatte funktion $\epsilon_f(g(x)-g(x_0))$ er en epsilonfunktion, da g er differentiabel og derfor kontinuert.

Derfor fås den sidste omskrivning, der viser både at h er differentiabel og h 's differential-kvotient i x_0 .

$$h(x) = h(x_0) + f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \cdot (x - x_0) + \epsilon_h(x - x_0) \cdot (x - x_0) \quad (5)$$

Huskeregul

Lad f og g være to funktioner som nævnt ovenfor. Benyt $g(x) = u$ og $f(u) = y$. Med notationen stammende fra Gottfried Wilhelm von Leibniz⁶ skrives

$$g'(x) = \frac{du}{dx}, \quad f'(u) = \frac{dy}{du} \quad \text{og} \quad h'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Højresiderne ligner brøker, men er principielt enheder, der ikke kan skilles. Alligevel kan man som huskeregel lade, som om brøkregler gælder:

$$h'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Vi husker reglen ved at lade som om, "brøken kan forlænge med du ". Her er reglen nok ikke til så megen hjælp; når vi kommer til integration er teknikken mere værdifuld.

Eksempler på anvendelse

Lad $h(x) = (\ln(x) + 3)^2$

$$f(u) = u^2, \quad f'(u) = 2u$$

$$g(x) = \ln(x) + 3, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2(\ln(x) + 3) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2(\ln(x) + 3)}{x}$$

Øvelse 13

- Find $h'(x)$ hvor
 - $h(x) = \ln(x^3)$
 - $h(x) = \sqrt{3+x^2}$
 - $h(x) = 3 \sin(3x+4)$

⁶ http://en.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz#Calculus

Øvelse 14

- Find tangenter med hældningskoefficienten 0,50 for funktionen

$$f(x) = \sin(x^2), x \in [0; 3]$$

- Har funktionerne $\ln(x)$ og $\sqrt{x}$ parallelle tangenter?

- $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ for $x \neq 0$, $f(0) = 0$

- Er f kontinuert?

- Er f differentiabel

- $f(x) = \ln(3\sqrt{x^2 + e^x})$

- Hvad er $DM(f)$?

- Kan du erstatte funktionen med en enklere funktion i et eller flere intervaller (således at fejlen numerisk er mindre end 1/1000?)

Brøkregler

Reciprok funktion

Lad $f(x)$ være en differentiabel funktion, hvor $f(x) \neq 0$. Så er $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ differentiabel og $g'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$

Øvelse 15

- Vis sætningen ved at differentiere produktet af f og g
- Vis sætningen ved at benytte kædereglen

Generel brøkregel

Lad f og g være differentiable funktioner, hvor $g(x) \neq 0$. Så er $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ differentiabel og $h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Øvelse 16

- Vis sætningen ved at differentiere produktet af f og $1/g$

Introduktion

I den følgende øvelse skal du benytte en notation for funktioner og afledte funktioner med parenteser som vist i følgende eksempel:

$$f(x) = x^2 = (x^2)$$

$$f'(x) = (x^2)' = 2 \cdot x$$

Du skal i øvelsen differentiere nedenstående funktioner og vise alle mellemresultater med angivelse af den regel, du har anvendt som i dette vejledende eksempel:

$$f(x) = 3 \cdot x^2 - 4$$

$$f'(x) = (3 \cdot x^2 - 4)' = (3 \cdot x^2)' - (4)'$$

Reglen for differensfunktioner

$$f'(x) = (3 \cdot x^2)' - 0$$

Afledt funktion for konstant funktion

$$f'(x) = 3 \cdot (x^2)'$$

Reglen om produkt af reelt tal og funktion

$$f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x^{2-1}$$

Reglen om polynomier (n-reglen)

$$f'(x) = 6 \cdot x^1$$

Beregnet produktet $3 \cdot 2 = 6$ og differensen $2 - 1 = 1$

$$f'(x) = 6x$$

Alm. skrivemåde: multiplikationstegn og 1 er her usynlige!

Øvelse 17

1. $f(x) = 6 \cdot x^5 - e^x$

2. $g(x) = 3 \cdot \ln(x)$

3. $h(x) = 2x^2 \cdot (5 - x^2)$

4. $j(x) = 5 \cdot 5^x$

5. $k(x) = -3e^{2x}$

6. $m(x) = \sqrt{x} \cdot x^2$

7. $n(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

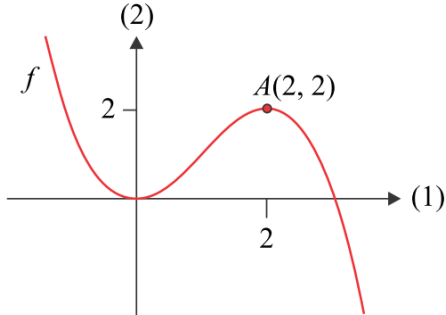
8. $o(x) = e^x \cdot \ln(x)$

9. $p(x) = \ln(x^3)$

10. $q(x) = 3 \cdot 3^x \cdot x^3$

Kontroller dine svar med GeoGebra. Bemærk, at for en del af opgaverne er der flere relevante løsningsmetoder.

Eksempler på eksamensopgaver (uh)

1.	En funktion f er bestemt ved $f(x) = 3x^2 - 4x + 8.$ Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(2, f(2))$.
2.	En funktion f er givet ved $f(x) = ax^3 + 5x^2 + 2x + 1,$ hvor a er en konstant. Bestem a, så $f'(1) = -3$.
	En funktion f er givet ved $f(x) = -x^3 + 6x^2 + x.$ Bestem den værdi af x, hvor $f'(x)$ er maksimal.
4.	En funktion f er givet ved forskriften $f(x) = 5e^x + 4.$ Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.
5.	En funktion f er givet ved $f(x) = (2x + 1) \cdot \ln(x), \text{ hvor } x > 0.$ Bestem $f'(1)$.
6.	En funktion f er givet ved $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2.$ Grafen for f har et lokalt ekstremumpunkt i punktet $A(2, 2)$. a) Bestem konstanterne a og b. 

Tangenter

Vi vil i eksemplet her finde tangenter til parabeln på forskellige måder. Vi vil både benytte forskellige teknikker (lommeregner eller GeoGebra) og se forskellige opgavetyper. Hver gang benyttes samme funktion: $g(x) = \frac{x^2}{4} - 2x - 3$

Type 1: kendt x-værdi

Vi vil finde tangentens ligning for den givne funktion, hvor tangenten har røringspunktet A med x-værdien 6.

Besvarelse

y-værdien for A beregnes som:

$$g(6) = \frac{6^2}{4} - 2 \cdot 6 - 3 = 9 - 12 - 3 = -6$$

Dernæst findes $g'(x) = \frac{2 \cdot x}{4} - 2$ (jævnfør regler og tidligere resultater) og tangenthældningen a kan beregnes som:

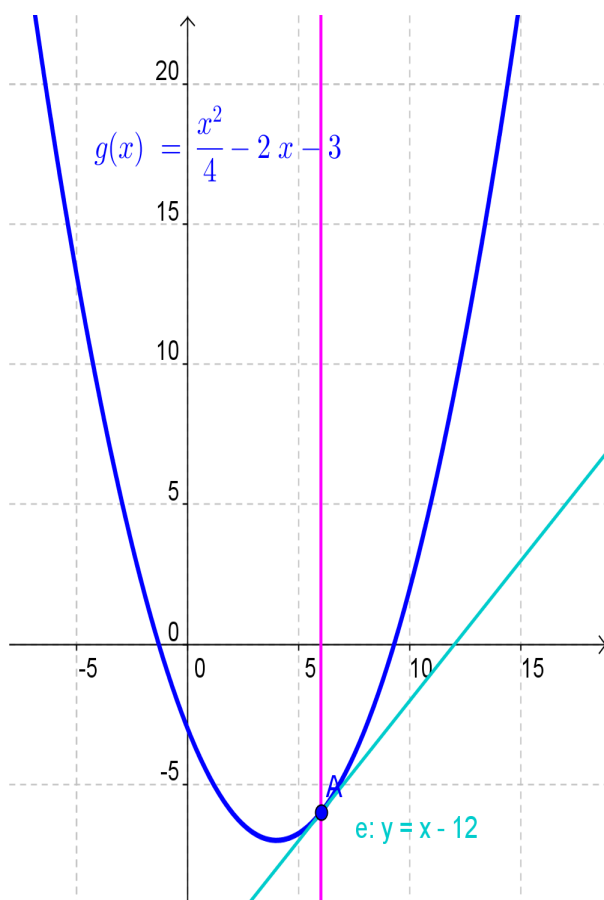
$$a = g'(6) = \frac{2 \cdot 6}{4} - 2 = 1$$

Tangentligningens anden parameter b findes med den sædvanlige formel for rette linjer: $b = y_1 - a \cdot x_1$, hvori indsættes de kendte tal:

$$b = -6 - 1 \cdot 6 = -12$$

Tangentens ligning er: $y = 1 \cdot x - 12$

Normalt skrives hældningskoefficienten ikke, når den er 1; her er den medtaget for at tydeliggøre beregning og resultat.



Alternativ besvarelse I

Grafen tegnes i GeoGebra; linjen $x=6$ tegnes. Skæringspunktet mellem disse findes: det er røringspunktet A. (Eller indtast i Inputfelt: $A = (6, f(6))$).

Tangentværktøjet vælges: klik på graf og røringspunkt og tangenten tegnes. I algebravinduet eller på tegningen kan tangentligningen aflæses.

Tangentens ligning: $y = x - 12$

Alternativ besvarelse II

Når størrelserne $x = 6$, $y = f(6) = -6$ og $f'(6) = 1$ er kendt, benyttes formelen for tangentligninger:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{hvori indsættes de kendte tal:}$$

Differential- og integralregning (1)

$$\begin{aligned}y &= 1 \cdot (x-6) + (-6) \Leftrightarrow \\y &= x-6-6 \Leftrightarrow \\y &= x-12\end{aligned}$$

Tangentens ligning: $y = x - 12$

For at have overblik over dine data, kan du benytte tabellen

x	y	a	b

Type 2: kendt y -værdi

Vi vil finde parablens tangenter i røringspunkterne B og C med y -værdien 2.

Besvarelse

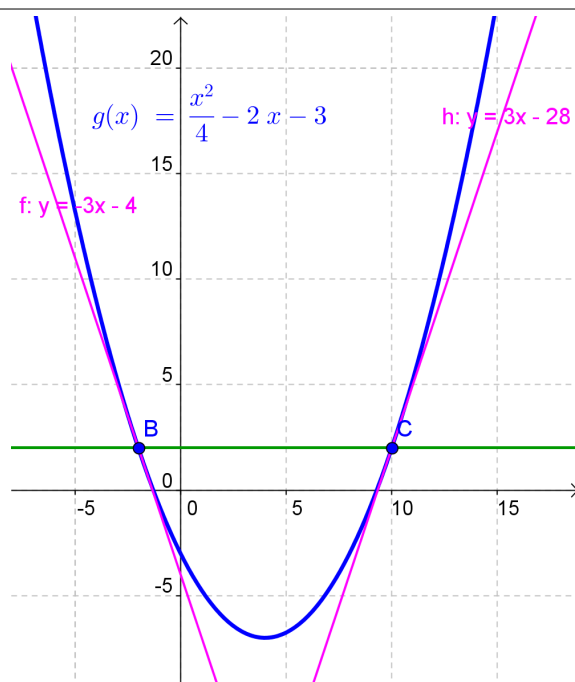
x -værdierne for B og C beregnes ved at løse ligningen:

$$\begin{aligned}g(x) &= 2 \Leftrightarrow \\ \frac{x^2}{4} - 2x - 3 &= 2 \Leftrightarrow \\ \frac{x^2}{4} - 2x - 3 - 2 &= 2 - 2 \Leftrightarrow \\ \frac{x^2}{4} - 2x - 5 &= 0 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

Det er en sædvanlig andengradslikning med

$$a = \frac{1}{4}, b = -2, c = -5$$

$$d = 4 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-5) = 9$$



Løsningerne er $x_1 = -2$ og $x_2 = 10$

De tilsvarende y -værdier er begge +2 (iflg. opgaven): $y_1 = 2$ og $y_2 = 2$

Dernæst findes med $g'(x) = \frac{2 \cdot x}{4} - 2$ de respektive tangenthældninger:

$$a_1 = \frac{2 \cdot (-2)}{4} - 2 = -3 \quad \text{og} \quad a_2 = \frac{2 \cdot 10}{4} - 2 = 3$$

Tangentligningens anden parameter b findes med den sædvanlige formel for rette linjer:

$b = y_1 - a \cdot x_1$, hvori indsættes de kendte tal:

$$b_1 = 2 - (-3) \cdot (-2) = -4$$

$$b_2 = 2 - 3 \cdot 10 = -28$$

Resultaterne opsummeres:

x	y	a	b
-2	2	-3	-4
10	2	+3	-28

Tangentligningerne bliver så:

Tangent 1: $y = -3x - 4$; **Tangent 2:** $y = +3x - 28$

Tangentligningerne kunne også være fundet som før med GeoGebra: Punkterne B og C findes som skæringspunkter mellem grafen og linjen $y=2$. Derefter benyttes tangentværktøjet.

Type 3: kendt tangenthældning

Antag, at der skal findes en tangent til g med hældningen -1 ; x -værdien i røringspunktet findes så ved at løse ligningen:

$$g'(x) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x}{4} - 2 = -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x}{4} - 2 + 2 = -1 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x}{4} = 1 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1 \cdot 4}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = 2$$

y -værdien i røringspunktet findes som $g(2) = \frac{2^2}{4} - 2 \cdot 2 - 3 = 1 - 4 - 3 = -6$

Tangentens parameter b fås så som

$$b = -6 - (-1) \cdot 2 = -4$$

Tangentens ligning er : $y = -x - 4$

Med GeoGebra findes først $g'(x)$; denne graf skæres med linjen $y=-1$; i skæringspunktet S er x -værdien også røringspunktets x -værdi. Røringspunktet R kan findes som

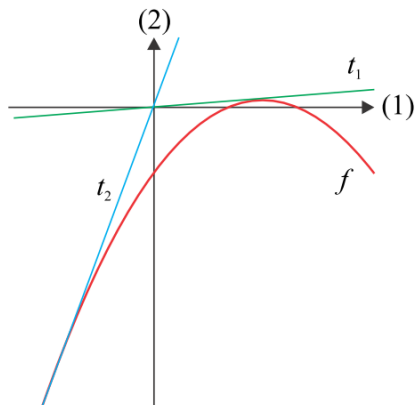
$R = (x(S), f(x(S)))$. Derefter løses opgaven som i de foregående eksempler.

En eksamensopgave (mh)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = -x^2 + 3x - 2.$$

Grafen for f har netop to tangenter t_1 og t_2 , der går gennem punktet $(0,0)$.



- a) Bestem en ligning for hver af disse tangenter.

Funktioners monotoniforhold og ekstrema

Et indskud om de reelle tal

Vi er vant til at regne med reelle tal ($\mathbb{R}$) på samme måde som vi regner med brøktallene ($\mathbb{Q}$). Der gælder de samme love for addition og multiplikation (kommutative og associative), den samme distributive lov, der findes nulelement og modsat element, der findes 1-element og inverst element i begge legemer⁷. Men de reelle tal er en udvidelse af $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}$ er en delmængde af $\mathbb{R}$, idet $\mathbb{R}$ fx også indeholder løsninger til ligninger som $x^n = a, a > 0$.

Vi vil ikke undersøge de sætninger, der kun gælder for reelle tal, men dog kigge på intervaller:

Intervallruser

Lad $[v_1, h_1], [v_2, h_2], [v_3, h_3], \dots, [v_n, h_n], \dots$ være en uendelig følge af lukkede intervaller, hvor hvert interval er enten venstre eller højre halvdel af det foregående for $n > 1$. Denne følge af intervaller kaldes en intervalruse.

Definition

Et tal, der ligger i alle rusens intervaller, siges at være bestemt af rusen.

Sætning

En ruse kan højst bestemme et tal

Bevis

Antag at en ruse bestemte to forskellige tal: p og q . Så ville $|p - q| > 0$, men de skal begge ligge i et interval, hvor længden er $\frac{|h_1 - v_1|}{2^{n-1}}$. Det er umuligt for n tilstrækkeligt stor, og derfor kan rusen højst bestemme 1 tal.

Det virker fornuftigt, at har vi en intervalruse, vil den bestemme et tal, men det er ikke noget, vi med vort grundlag kan vise. Men vi kan antage det som et aksiom eller en grundsætning. Hvis sætningen skal bevises, er vi nødsaget til at postulere andre (måske enklere eller mere fundamentale) grundsætninger.

Grundsætning

Enhver intervalruse bestemmer præcist et reelt tal.

⁷ Betegnelsen legeme dækker over en mængde med 2 operatorer (+ og $\cdot$) som følger de ovenfor skitserede regler. Det skal derudover gælde, at er a og b elementer i legemet, gælder det også for $a+b$ og $a \cdot b$. De komplekse tal $\mathbb{C}$ udgør også et legeme, men der kan desuden konstrueres mange andre legemer.

Monotoniforhold og ekstrema

Opgaven går ud på at beskrive i hvilke dele af funktionens definitions­mængde, den er voksende hhv. aftagende.

Der benyttes følgende definition:

Voksende og aftagende funktion

f er en voksende funktion (i et interval), hvis $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

f er en aftagende funktion (i et interval), hvis $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Monotonisætningen

Hvis $f'(x) > 0$ for alle x i et interval I , så er $f(x)$ voksende i intervallet

Hvis $f'(x) < 0$ for alle x i et interval I , så er $f(x)$ aftagende i intervallet

Hvis $f'(x) = 0$ for alle x i et interval I , så er $f(x)$ konstant i intervallet

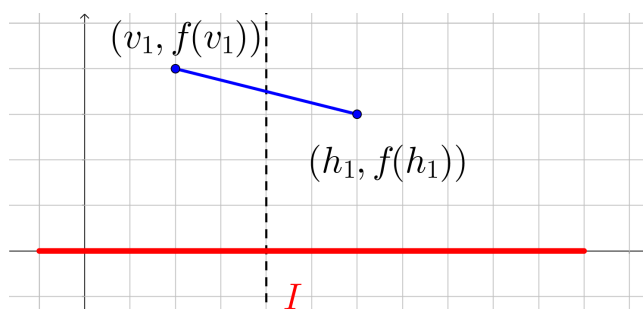
(I antages at være et åbent interval, men udsagnet om f gælder det tilsvarende lukkede for så vidt f er defineret i endepunkterne.)

Bevis

Antag: $f'(x) > 0$ for alle x i et interval I .

Antag også, at f ikke er voksende i intervallet: så må der eksistere to tal: v_1 og h_1 , hvor $v_1 < h_1$ og $f(v_1) \geq f(h_1)$.

Dette er vist på tegningen til højre. Af den anden antagelse følger, at sekanten gennem de to tegnede punkter har en hældningskoefficient a_1 , hvor $a_1 \leq 0$.



Del intervallet $[v_1, h_1]$ i to lige store intervaller ved $m = (v_1 + h_1)/2$. Uanset om punktet

$(m, f(m))$ ligger over den blå linje, på den blå linje eller under den blå linje, kan vi vælge et af de halve intervaller, hvor det gælder om sekantens hældningskoefficient (a_2) at: $a_2 \leq a_1$.

Dette nye interval vælges og kaldes $[v_2, h_2]$. Således fortsættes i det uendelige og der skabes en intervalruse, der bestemmer et tal: c .

Tegn sekanter fra $(c, f(c))$ til $(v_n, f(v_n))$ og $(h_n, f(h_n))$. Som før ses, at mindst en af disse har en hældningskoefficient, der er ikke-positiv. Men så kan $f'(c)$ ikke være positiv i strid med vores første antagelse. Da begge antagelser fører til en modstrid, må det gælde, at $f'(x) > 0$ medfører, at f er voksende.

På helt tilsvarende vis bevises de to næste delsætninger.⁸

⁸ Et alternativt bevis benytter Middel­værdisætningen (side 63.)

Den omvendte monotonisætning

Hvis $f(x)$ er differentiabel og voksende i et interval, er $f'(x) \geq 0$

Hvis $f(x)$ er differentiabel og aftagende i et interval, er $f'(x) \leq 0$

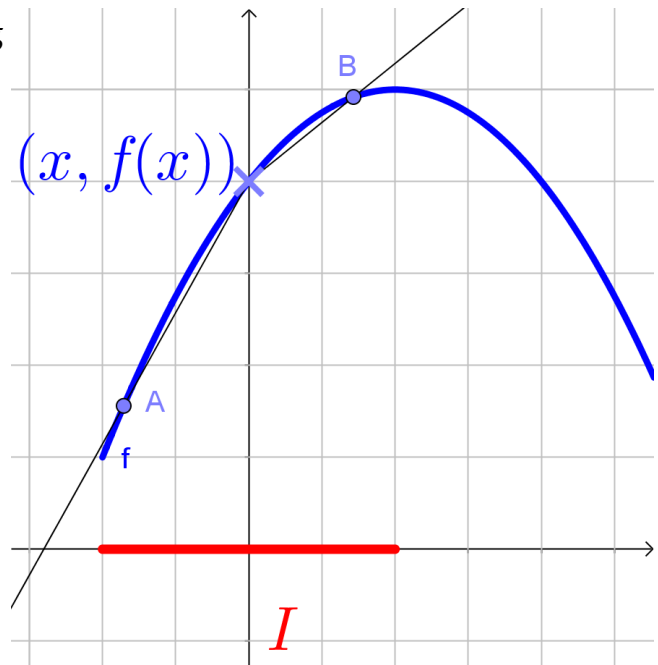
(I kan være åbent eller lukket.)

Bevis

Vælg et vilkårligt indre punkt i intervallet og tegn sekantene fra $(x, f(x))$ til nogle nabopunkter på grafen. Er nabopunkterne tæt nok på $(x, f(x))$ ses at hældningskoefficienterne for sekantene må være positive og at grænseværdien $f'(x)$ derfor ikke kan være negativ.

Vælges et endepunkt for intervallet kan funktionen have et lokalt ekstremum: så vil sekanternes hældningskoefficienter være positive hhv. negative afhængigt af, til hvilken side nabopunktet vælges.

Grænseværdien $f'(x)$ må derfor være 0 (nul.)



Lokale extrema

Hvis $f(x)$ er differentiabel og fortegnsvariationen for $f'(x)$ omkring x_0 er $'' + 0 - ''$ har f et lokalt maksimum i x_0 og omvendt.

Hvis $f(x)$ er differentiabel og fortegnsvariationen for $f'(x)$ omkring x_0 er $'' - 0 + ''$ har f et lokalt minimum i x_0 og omvendt.

Hvis $f(x)$ er differentiabel og fortegnsvariationen for $f'(x)$ omkring x_0 er $'' + 0 + ''$ er f voksende i et interval rundt om x_0 og har en vandret vendetangent i x_0 og omvendt.

Hvis $f(x)$ er differentiabel og fortegnsvariationen for $f'(x)$ omkring x_0 er $'' - 0 - ''$ er f aftagende i et interval rundt om x_0 og har en vandret vendetangent i x_0 og omvendt.

Øvelse 18

- Lav skydere for a, b, c og d . Tegn grafen for $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ samt graferne for de afledte funktioner f' og f'' . Benyt 3 forskellige farver.
- Find ekstremumpunkter $(x_0, f(x_0))$ med forskellige værdier for parametrene
 - og undersøg for hver af disse fortegnsvariationen for f' omkring x_0 og
 - fortegnet for $f''(x_0)$

Sætningerne benyttes til at beskrive monotoniforholdene for funktioner som i det følgende eksempel.

Eksempel: Undersøgelse af monotoniforhold

Eksamensopgave 10, a og b, maj 2012 gl-Matematik B

En funktion f er givet ved $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

a) Løs $f'(x) = 0$

b) Bestem monotoniforholdene for f

Besvarelse

Ligningen løses

Forskriften indtastes i GeoGebra og den afledte funktion findes (ved indtastning af $f'(x)$).

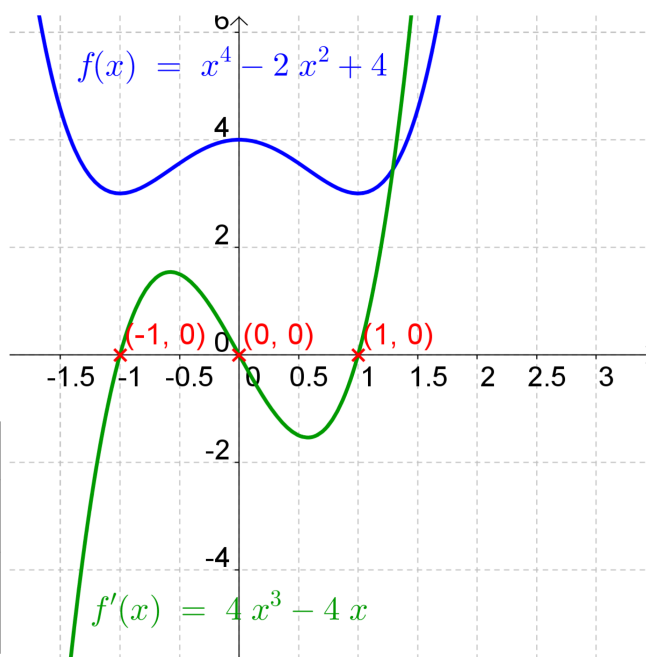
Skæringspunkter mellem grafen for f' og x-aksen findes, hvorefter ses, at løsningsmængden til ligningen $f'(x) = 0$ er:

$$L = \{-1; 0; 1\}$$

På tegningen ses løsningerne, og da et tredjegradspolynomium højst har 3 rødder, er L den fuldstændige løsning.

Monotoniforhold bestemmes

Ved aflæsning på figuren til højre sammen med løsningsmængden udfyldes tabellen:



	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	aft	lok mi	voks	lok mx	aft.	lok mi	voks

Heraf ses

I $] -\infty; -1]$ aftager f , da $f'(x) < 0$ for $x \in] -\infty, -1 [$

I $] -1; 0]$ vokser f , da $f'(x) > 0$ for $x \in] -1, 0 [$

I $] 0; 1]$ aftager f da $f'(x) < 0$ for $x \in] 0, 1 [$

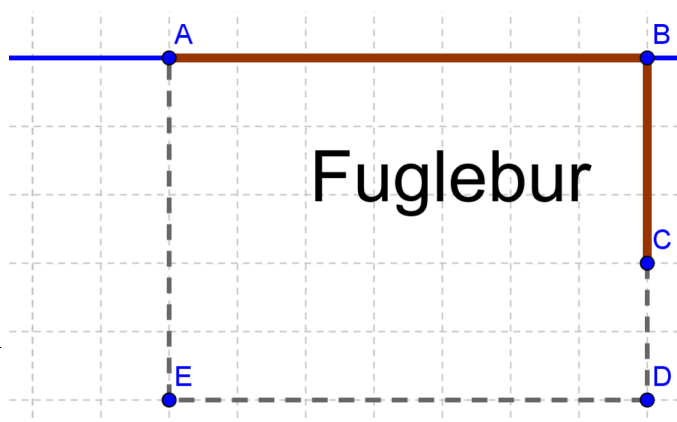
I $] 1; \infty]$ vokser f da $f'(x) > 0$ for $x \in] 1, +\infty [$

- Forsøg at løse opgaven uden hjælpemidler.

Optimering

Fugleburet

Hr. Mortensen vil indrette et fugleburet til sine undulater som et rektangulært rum. Han har 15 m trådnet med en højde, der netop når fra gulv til loft; det skal udgøre 2 eller 3 af siderne sammen med de murede vægge. De murede vægge udgør altså 2 af rektanglets sider – evt. sammen med en del af trådnettet. Disse består af en mur på 3 m (BC på figuren) som står vinkelret på en lang mur (mere end 15 m).



Opgaven

- Bestem målene på AB og AE, så rektanglet ABDE får det størst mulige areal.
- Beregn dette areal.

Besvarelse

Lad $x = |AE|$ og $y = |AB| = |ED|$ (idet modstående sider i et rektangel er lige store.)

Betegnes længden af siderne med trådnet som L , fås

$L = x + y + (x - 3) = 2x + y - 3$ (idet vi forudsætter at alle 3 m af den korte mur indgår i omkredsen.⁹)

Hvis alt nettet benyttes, fås:

$$\begin{aligned} L &= 15 \Leftrightarrow \\ 2x + y - 3 &= 15 \Leftrightarrow \\ 2x + y - 3 - 2x + 3 &= 15 - 2x + 3 \Leftrightarrow \\ y &= 18 - 2x \end{aligned}$$

Fugleburets areal er A , og da der er tale om et rektangel, fås

$$A = x \cdot y$$

Da der er 15 m trådnet til rådighed, kan $y = 18 - 2x$ indsættes:

$$\begin{aligned} A &= x \cdot y \Leftrightarrow \\ A &= x \cdot (18 - 2x) \Leftrightarrow \\ A &= 18x - 2x^2 \end{aligned}$$

På figuren er tegnet grafen for arealfunktionen $A(x)$ (blå) og grafen for den afledte funktion A' (lilla, stiplet). Denne skærer x-aksen i $(4,5 ; 0)$; dvs. det tilsvarende toppunkt er i $(4,5 ; A(4,5)) = (4,5 ; 40,5)$.

⁹ Principielt bør det undersøges, om arealet kunne blive større, hvis ikke hele den korte mur benyttes. Det kan dog nemt vises, at i så fald vil arealet blive mindre end 36 m^2 .

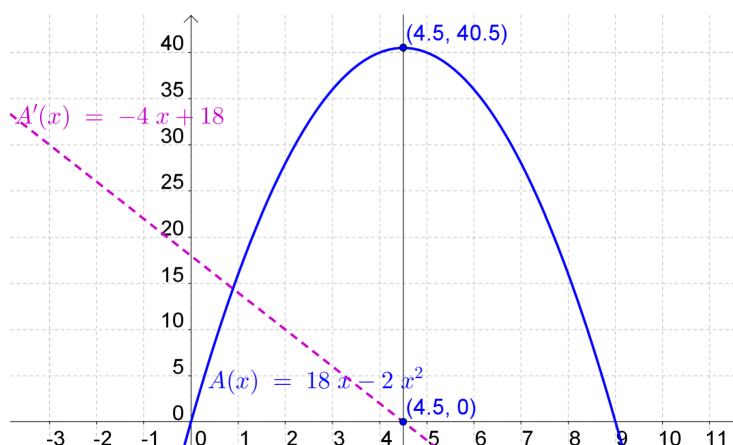
Differential- og integralregning (1)

Både af parablens udseende og fortegnsvariationen for A' (+ 0 -) ses, at A har et lokalt maksimum for $x=4,5$. Da der ikke er andre ekstrema, er der tale om en størsteværdi.

Længden af AE skal være 4,5 m

Længden af |AB| er 9,0 m

Arealet af ABDE er 40,5 m²



Ordrestørrelser

I firmaet Falia A/S importeres produktet NOGO fra Megapolis. Firmaet har et salg af produktet, der fordeler sig jævnt over hele året.

Nogle af omkostningerne ved køb og salg af produktet, knytter sig til ordrestørrelsen. Hver gang, der afgives en ordre, koster det kr. 900 (til fragt, personaleomkostninger mv.) Yderligere er der omkostninger til lager beregnet til kr. 25 pr. enhed pr år. (til forrentning og betaling af lagerplads.)

Der regnes med et salg på 2000 enheder pr. år. Det forudsættes, at man kan afgive ordrer der vil ankomme hos Falia A/S præcis når lageret er tomt.

- Bestem den optimale ordrestørrelse

Besvarelse

Lad x være ordrestørrelsen (målt i antal enheder); så afgives der $2000/x$ ordrer pr. år a kr. 900 (alene i ordreomkostninger.) Lad $f(x)$ være de årlige ordreomkostninger ved ordrestørrelsen x (i kroner)

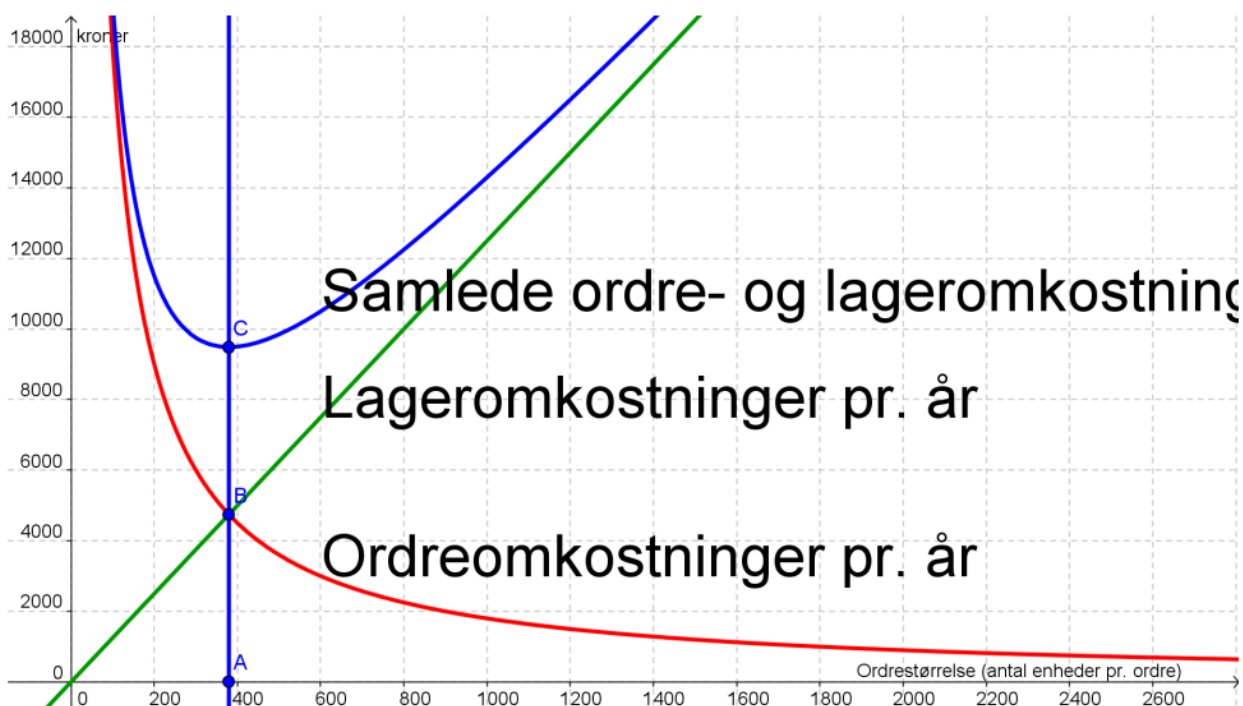
$$f(x) = \frac{2000}{x} \cdot 900$$

Lad $g(x)$ være de årlige lageromkostninger ved at holde lager (i kroner). Da lageret varierer mellem x og 0, vil det i gennemsnit være $x/2$ i løbet af et år og omkostningerne bliver:

$$g(x) = \frac{x}{2} \cdot 25$$

De samlede omkostninger (der er afhængige af ordrestørrelsen), er $h(x) = f(x) + g(x)$. Den optimale ordrestørrelse fås, hvor $h'(x) = 0$. Der er kun en løsning, og det indses nemt, at der er tale om et minimum, da fortegnsvariationen for h' er -0+.

De tre funktioner er vist herunder:



Heraf ses, at **den optimale ordrestørrelse er 379 enheder pr. ordre.** Bemærk,

- at $h'(x)=0$ medfører at $f'(x) = -g'(x)$
- at $f'(x) = -g'(x)$ medfører $f(x) = g(x)$
- Overvej hvorfor!

Eksamensopgave 25. maj 2012 (16)

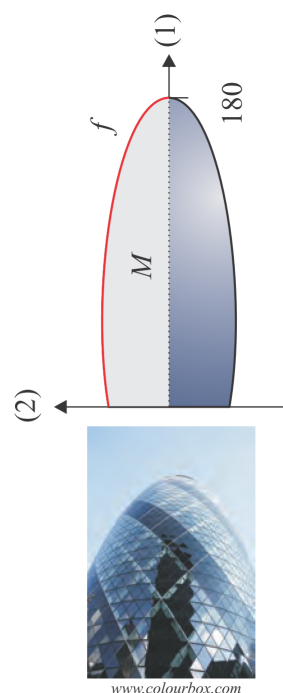
En funktion f er givet ved

$$f(x) = 19 \cdot \frac{\sqrt{-x^2 + 100x + 14400}}{65}, \quad 0 \leq x \leq 180.$$

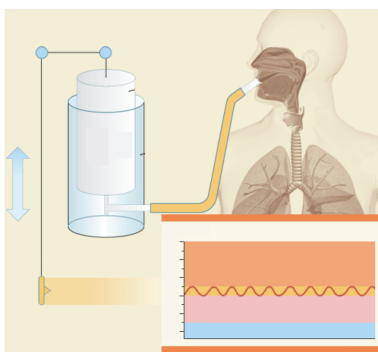
Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets akser i første kvadrant en punktmængde M . Bemærk, at førsteaksen er lodret på figuren.

Billedet viser en cigarformet bygning. I en model har bygningen form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° omkring førsteaksen, og enheden på akserne er meter.

- Bestem maksimum for f , og benyt dette til at bestemme bredden af bygningen, der hvor den er bredest.
- Benyt modellen til at bestemme bygningens volumen.



Eksamensopgave 5. dec. 2014 (12)



Kilde: <http://www.fifahealth.com/>

Med et spirometer har man målt, hvordan luftmængden i lungerne hos en bestemt person afhænger af tiden. I en model kan luftmængden beskrives ved

$$f(t) = 3,2 + 0,4 \cdot \sin(1,25 \cdot t), \quad 0 \leq t \leq 5,$$

hvor $f(t)$ er luftmængden i lungerne (målt i liter) til tidspunktet t (målt i sekunder fra begyndelsen af vejtrækningen).

- Tegn grafen for f , og benyt modellen til at bestemme den maksimale luftmængde.
- Benyt modellen til at bestemme de tidspunkter, hvor luftmængden er 3,5 liter.
- Bestem $f'(2)$, og forklar betydningen af dette tal.

Eksamensopgave 7. dec. 2015 (11)

Vanddybden i et bestemt havnebassin afhænger af tidevandet. I en model kan vanddybden som funktion af tiden beskrives ved

$$d(t) = 2 \cdot \sin(0,52t - 3,14) + 7,$$

hvor $d(t)$ er vanddybden i havnebassinet (målt i meter) til tidspunktet t (målt i timer).

- Bestem den minimale og den maksimale vanddybde i havnebassinet.

Eksamensopgave 13. aug. 2015 (11)

I en model for glukosekoncentrationen i blodet for en person med diabetes gælder det, at

$$G(t) = 96 + 263 \cdot e^{-0,63 \cdot t} \cdot \cos(1,03 \cdot t - 1,57), \quad 0 \leq t \leq 6,$$

hvor $G(t)$ er glukosekoncentrationen i blodet (målt i mg/dl) til tidspunktet t (målt i timer, der er gået siden indtagelsen af glukosen).

- Tegn en skitse af grafen for G , og benyt modellen til at bestemme glukosekoncentrationen i blodet efter 2 timer.
- Benyt modellen til at bestemme den største og mindste glukosekoncentration i blodet.
- Benyt modellen til at bestemme det tidsinterval, hvori glukosekoncentrationen i blodet er aftagende.

Kilde: Modeling Diabetes, Fall 2010, Math 636, <http://www-rohan.sdsu.edu/~jmahaffy/>

Oversigt

Du skal nu kunne:

- differentiere de almindelige funktioner, der er omtalt her
- benytte differentiationsregler
- finde ligninger for tangenter
- undersøge funktioners monotoniforhold
- finde ekstrema

Desuden skal du være fortrolig med begreberne

- grænseværdi
- kontinuitet
- differentiability

Endelig skal du i høj grad være fortrolig med tretrinsreglen og tankegangen bag den.

Integralregning

Det ubestemte integral

At integrere en funktion f vil sige at finde den eller de funktioner, hvis afledte funktion er lig med f .

Definition af stamfunktion

Lad f være en kontinuert funktion defineret i intervallet I , hvor $I \subseteq \mathbb{R}$, og F en differentiabel funktion defineret i samme interval.

F kaldes en stamfunktion til f , hvis $F' = f$. (Differentiationsprøven)

Sætning om stamfunktioner (I)

Hvis F er en stamfunktion til f , er $G = F + k$ også en stamfunktion til f , hvor k er en vilkårlig konstant.

Bevis

G er en stamfunktion til F , fordi: $G' = (F+k)' = (F)' + (k)' = f + 0 = f$

hvor der benyttes definition af G , differentiation af sum, at F er en stamfunktion til f og den afledte af en konstant funktion er 0.

Sætning om stamfunktioner (II)

Hvis F er en stamfunktion til f , og G er en anden stamfunktion til samme f , er $G = F + k$, hvor k er en eller anden konstant.

Bevis

Vi undersøger funktionen: $(G - F)$

$$(G - F)' = (G)' - (F)' = f - f = 0$$

hvor der benyttes differentiation af differens, og at F og G er stamfunktioner til f .
Hvis den afledte af en funktion er lig med nul for alle værdier i definitionsmængden, er funktionen en konstant (Se side 38.). Dvs.:

$$(G - F) = k \Leftrightarrow G = F + k$$

(Et alternativt bevis: Var der to punkter på grafen for $G - F$ med forskellig y -værdi, kunne vi tegne sekanten gennem disse punkter. Da y -værdierne er forskellige, er hældningskoefficienten ikke 0! Middelværdisætningen (side 63) siger så, at mellem disse punkter findes et tredje punkt, hvor tangenten har samme hældning som sekanten, men det strider mod $(G - F)' = 0$. Altså må alle y -værdier være ens og funktionen konstant.)

Definition af det ubestemte integral

Lad f være en kontinuert funktion defineret i intervallet I , hvor $I \subseteq \mathbb{R}$, og F en differentiabel funktion defineret i samme interval. Så er mængden af stamfunktioner til f det ubestemte integral. Det skrives symbolsk: $\int f(x) dx = F(x) + k$

Det langstrakte s står for sum og $f(x)$ er den ene side i et rektangel, dx den anden (meget lille) side. For at finde et nærmere bestemt areal skal der adderes uendeligt mange små arealer. Det beskrives senere i Det bestemte integral.

Differentialregning og integralregning kaldes også infinitesimalregning. Betegnelsen blev benyttet af Leibniz, idet "infinitus" (latin) betyder uendelig.

Sætninger om stamfunktioner

De følgende 5 sætninger bevises alle med differentiationsprøven. t er en reel konstant og f og g er kontinuerte funktioner, F og G de tilsvarende stamfunktioner. (Hvor g' benyttes, forudsættes g at være differentiabel.)

Sum

Lad $s = f+g$. Så er $(F+G)$ en stamfunktion til s ,

fordi:

$$(F+G)' = (F)' + (G)' =$$

$$f + g =$$

s

Differentiationsregel for summer

Skyldes de indledende antagelser

hvorved differentiationsprøven er "bestået"

Differens

Lad $d = f-g$. Så er $(F-G)$ en stamfunktion til d ,

fordi:

$$(F-G)' = (F)' - (G)' =$$

$$f - g =$$

d

Differentiationsregel for differenser

Skyldes de indledende antagelser

hvorved differentiationsprøven er "bestået"

Produkt med konstant

Lad $a = t \cdot f$. Så er $t \cdot F$ en stamfunktion til a ,

fordi:

$$(t \cdot F)' = t \cdot (F)' = t \cdot f =$$

a

Differentiationsregel for produkt med konstant
 Skyldes de indledende antagelser
 hvorved differentiationsprøven er "bestået"

Substitution

Lad $q(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$. Så er $(F(g(x)))$ en stamfunktion til q ,

fordi:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) =$$

q

Differentiationsregel for sammensat funktion
 Skyldes de indledende antagelser
 hvorved differentiationsprøven er "bestået"

Substitution med Leibniz teknik

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx =$$

Kald $u = g(x)$

Så lader vi som om man kan regne med du og dx :

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot \frac{du}{g'(x)} =$$

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \Leftrightarrow du = g'(x) \cdot dx \Leftrightarrow \frac{du}{g'(x)} = dx$$

og erstatter dx i venstre spalte med brøken.

$$\int f(u) \cdot du =$$

g' forkortes væk., og $g(x)$ erstattes med u .

$$F(u) =$$

Endelig gælder at F er en stamfunktion til f ifølge antagelsen og at u kan erstattes med $g(x)$.

$$F(g(x))$$

Vi har med denne teknik fundet den samme stamfunktion som før!

Partiel integration

Lad $p = f \cdot g$ og lad F være en stamfunktion til f og H være en stamfunktion til produktet $F \cdot g'$. Så er $(F \cdot g - H)$ en stamfunktion til p ,

fordi:

$$(F \cdot g - H)' = (F \cdot g)' - (H)' =$$

Differentiationsregel for differens

Differential- og integralregning (1)

$$(F)' \cdot g + F \cdot g' - (H)' =$$

$$f \cdot g + F \cdot g' - F \cdot g' =$$

$$f \cdot g = p$$

Differentiationsregel for produkt

Antagelse samt definitionen af H

Reduktion og definition af p , hvorved differentiationsprøven er "bestået".

Liste over stamfunktioner

Funktion	Stamfunktion		Funktion	Stamfunktion
$f(x)=0$	$F(x)=k$		$f(x)=k$	$F(x)=kx$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2$		$f(x)=x^n$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x)=x^a, a \neq -1$	$F(x)=\frac{1}{a+1}x^{a+1}$		$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$
$f(x)=e^{kx}$	$F(x)=\frac{1}{k}e^{kx}$		$f(x)=a^x$	$F(x)=\frac{1}{\ln(a)}a^x$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)$		$f(x)=\sqrt{x}$	$F(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$f(x)=\cos(x)$	$F(x)=\sin(x)$		$f(x)=\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)$

At de anførte funktioner er stamfunktioner, kontrolleres nemt med differentiationsprøven.

Øvelse 19

- De følgende opgaver går ud på at finde en stamfunktion og i nogle tilfælde en stamfunktion, hvis graf går gennem et bestemt punkt (hvis et punkt er nævnt):
 - $f(x)=4x^7$
 - $f(x)=2x^{-1}$
 - $f(x)=5^x$
 - $f(x)=\sin(3x), (0,0)$
 - $f(x)=x^{1.7}+3x^2$
 - $f(x)=e^{2x}, \left(\frac{1}{2}, 3e\right)$
 - $f(x)=\ln(x)$
 - $f(x)=x\sqrt{x^2+3}$
 - $f(x)=x\ln(x)$
 - $f(x)=x^2\ln(x)$
 - $f(x)=x\ln(x^2)$
 - $f(x)=x\ln(x^{98})$

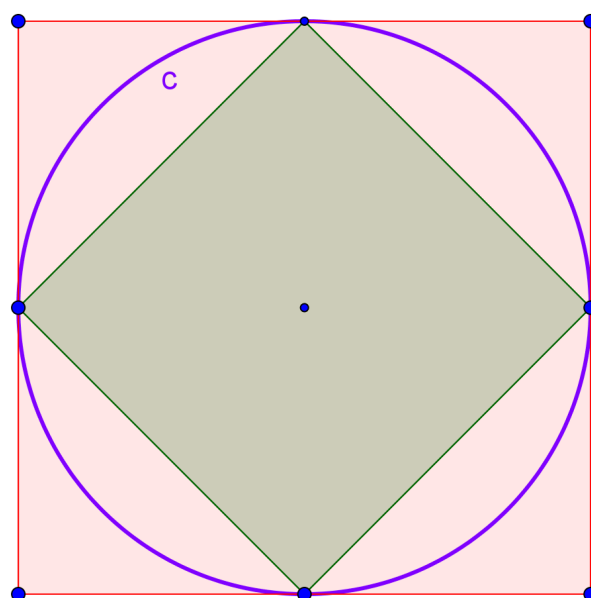
Det bestemte integral

Det bestemte integral handler i første omgang om arealbestemmelse ved at addere uendeligt mange små arealer. Det var ikke nogen ny ide: Allerede Arkimedes (ca. 287 f.Kr. – 212 f.Kr.) benyttede sig af denne teknik til bestemmelse af π og til at finde formelen for cirkelns areal.

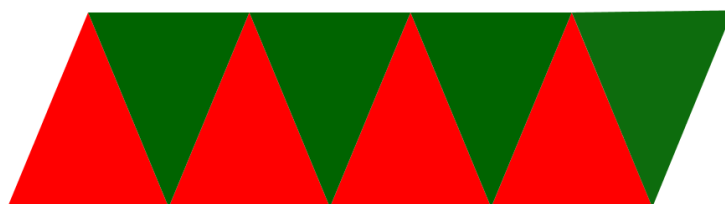
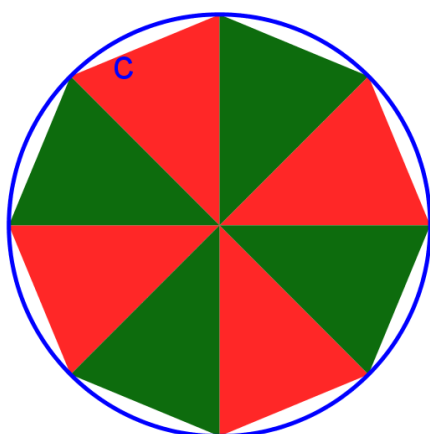
Hans tankegang var, at π er længden af enhedscirkelns (her c) halve omkreds: π må ligge mellem længderne af de halve omkredse af de to regulære polygoner (her kvadrater). Polygonerne er hhv. den indskrevne og den omskrevne polygon.

Med kvadrater giver det en meget grov tilnærmelse for π , men ved at forøge sideantallet i polygonen bliver resultatet mere og mere nøjagtigt. Det lykkedes ham at vise, at

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$



For at beregne cirkelns areal inddeles den i små trekanter næsten svarende til et cirkeludsnit. Disse trekanter flyttes, så de danner firkanten herunder til højre.



Den enes side ses let at have længden π , den anden længden 1 svarende til længden af radius. Når n (antallet af trekanter) nærmer sig uendeligt, vil firkanten nærme sig et rektangel og får derfor arealet $1 \cdot \pi = \pi$; samtidig nærmer den indskrevne polygons areal sig cirkelns areal.

Det bestemte integral

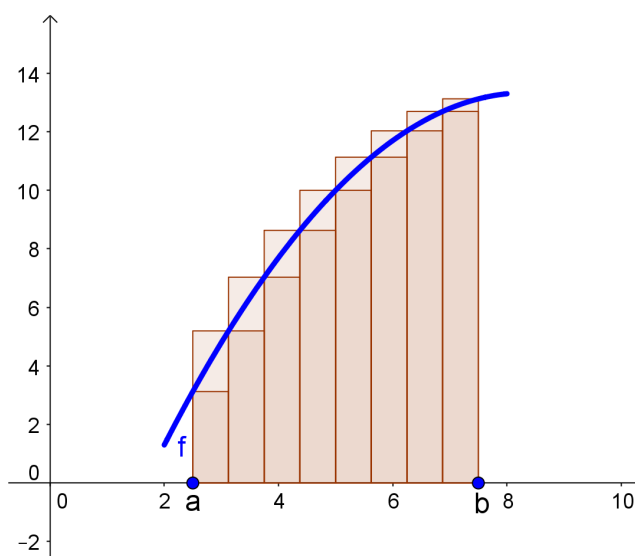
Opgaven går ud på at finde arealet af området mellem linjerne $x=a$ og $x=b$, grafen for funktionen f og 1. akse, idet f er en voksende¹⁰, kontinuert funktion.

Det første spørgsmål, der melder sig: Findes der overhovedet et tal, som det giver mening at kalde arealet? Og er det entydigt?

På billedet til højre ses grafen for f , der voksende og kontinuert.

Under grafen er der indtegnet n rektangler: det samlede areal af disse kaldes en undersum. Rektanglerne er også forlænget så hele området mellem graf og x -akse og lidt til er dækket af disse rektangler. Det samlede areal af de store rektangler kaldes en oversum.

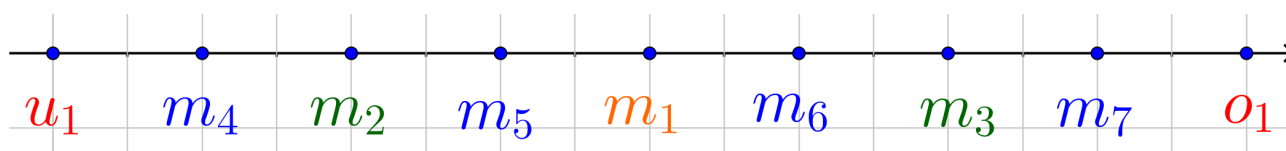
Bemærk, at for hvert rektangel blandt de "store" findes der et tilsvarende blandt de "små" med samme areal. Der er to undtagelser: Det største blandt de store og det mindste blandt de små.



Forskellen mellem oversum og undersum er altså forskellen mellem arealet af to rektangler. Derfor ses, at når n går mod uendelig og rektanglernes bredde går mod nul, kan forskellen mellem oversum og undersum blive vilkårlig lille. Som konsekvens kan der **højst** være en fælles grænseværdi. (Hvorfor?!)

At der eksisterer en grænseværdi for undersum og oversum indses indses således: Lad u_n og o_n være følger af undersummer og oversummer og $I_n = [u_n, o_n]$ følgen af intervaller, hvor de indgående rektangler har bredden $(b-a)/2^{n-1}$. Overvej at $I_n \subseteq I_{n+1}$

Lad m_n være et følge af midtpunkter dannet således: m_1 er midtpunktet af I_1 , m_2 er midtpunktet af venstre halvdel af I_1 , m_3 er midtpunktet af højre halvdel. Det oprindelige interval er nu delt i 4 dele, som igen deles af nye midtpunkter: m_4, m_5, m_6, m_7 . Således fortsættes i det uendelige ...

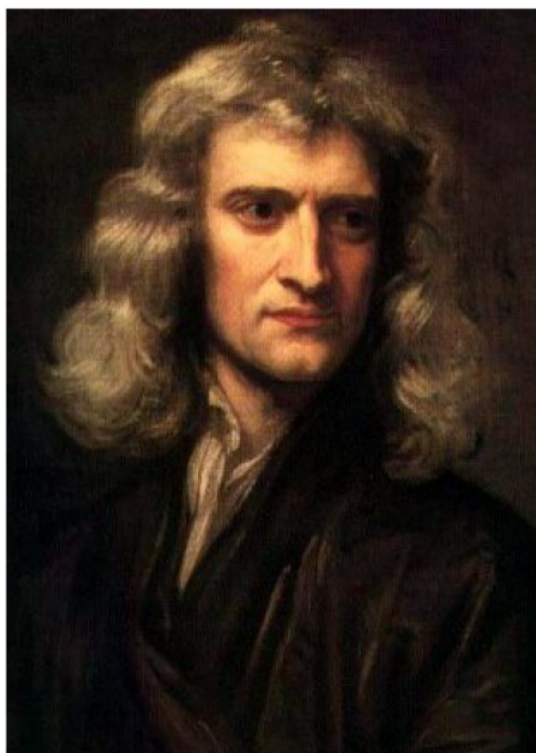


1. Antag: $\exists m_i : \forall n : m_i \in I_n$. Det medfører, at m_i er grænseværdi for både undersummer og oversummer.

¹⁰ Det er ikke en nødvendig betingelse, at funktionen er voksende, og beviserne for sætningerne uden denne betingelse kan føres tilsvarende.

2. Hvis påstanden i (1) er falsk,
 1. kan der findes et interval i følgen I_n , som ikke indeholder m_1 . Dette interval må ligge enten til højre eller til venstre for m_1 . Er det til venstre, kaldes intervallet $[u_1, m_1]$ for J_1
 2. I det tilfælde søger vi igen efter et interval i følgen I_n (som kommer senere i rækkefølgen end det tidligere valgte), og som ikke indeholder m_2 . Dette interval må ligge enten til højre eller til venstre for m_2 . Er det til højre, kaldes intervallet $[m_2, m_1]$ for J_2
 3. Ved at fortsætte på denne måde dannes en intervalruse, som bestemmer et tal. (Se side 37) Dette tal er grænseværdien for følgerne af oversummer eller undersummer.

Dvs. at der eksisterer en fælles grænseværdi for undersummer og oversummer, som er det bestemte integral.



Det bestemte integral

Definition af DBI I

Givet en kontinuert funktion $f(x)$, hvor $f(x) > 0$ (for alle x -værdier i DM) kaldes arealet mellem graf og x -akse begrænset af linjerne $x = a$ og $x = b$ for

$$\int_a^b f(x) dx$$

Sætning om DBI

Givet en voksende¹¹ kontinuert funktion $f(x)$, hvor $f(x) > 0$ (for alle x -værdier i DM). Om arealfunktionen $A(x)$ gælder, at $A'(x) = f(x)$, hvor A angiver arealet af området mellem graf og x -akse og lodrette linjer ved x -værdierne a og variabelen x .

Ef F en vilkårlig stamfunktion til f , er

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

$F(b) - F(a)$ kaldes også det bestemte integral (fra a til b)

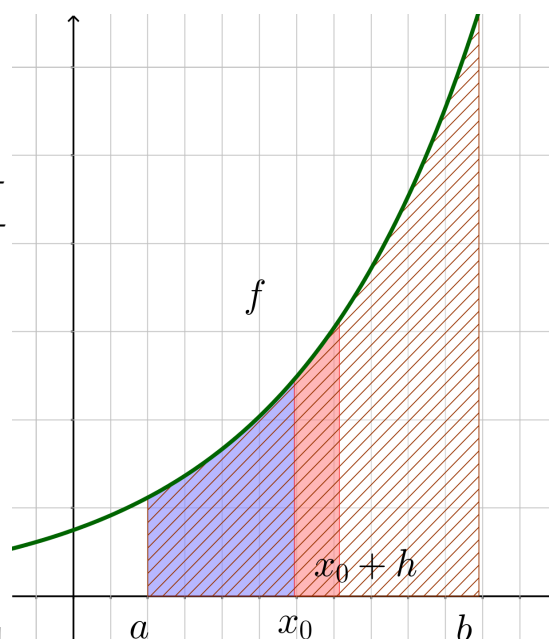
Bevis

I det foregående er vist, at der eksisterer et veldefineret areal mellem graf og x -akse begrænset af linjerne $x = a$ og $x = b$. Derfor findes der en arealfunktion $A(x)$, der for ethvert x_0 hvor $a \leq x_0 \leq b$ beregner arealet mellem graf og x -akse begrænset af linjerne $x = a$ og $x = x_0$.

Funktionsforskriften for denne findes med 3-trinsreglen.

På tegningen til højre er markeret 3 arealer:

1. arealet mellem a og x_0 ($A(x_0)$) [Blåt]
2. arealet mellem x_0 og $x_0 + h$ (ΔA) [Rødt]
3. hele arealet fra a til b ($A(b) = \int_a^b f(x) dx$) [Skraveret]



¹¹ Vi beviser sætningen under forudsætning af at funktionen er voksende, men det er ikke et nødvendigt krav. Beviset kan forholdsvis let gennemføres uden denne betingelse.

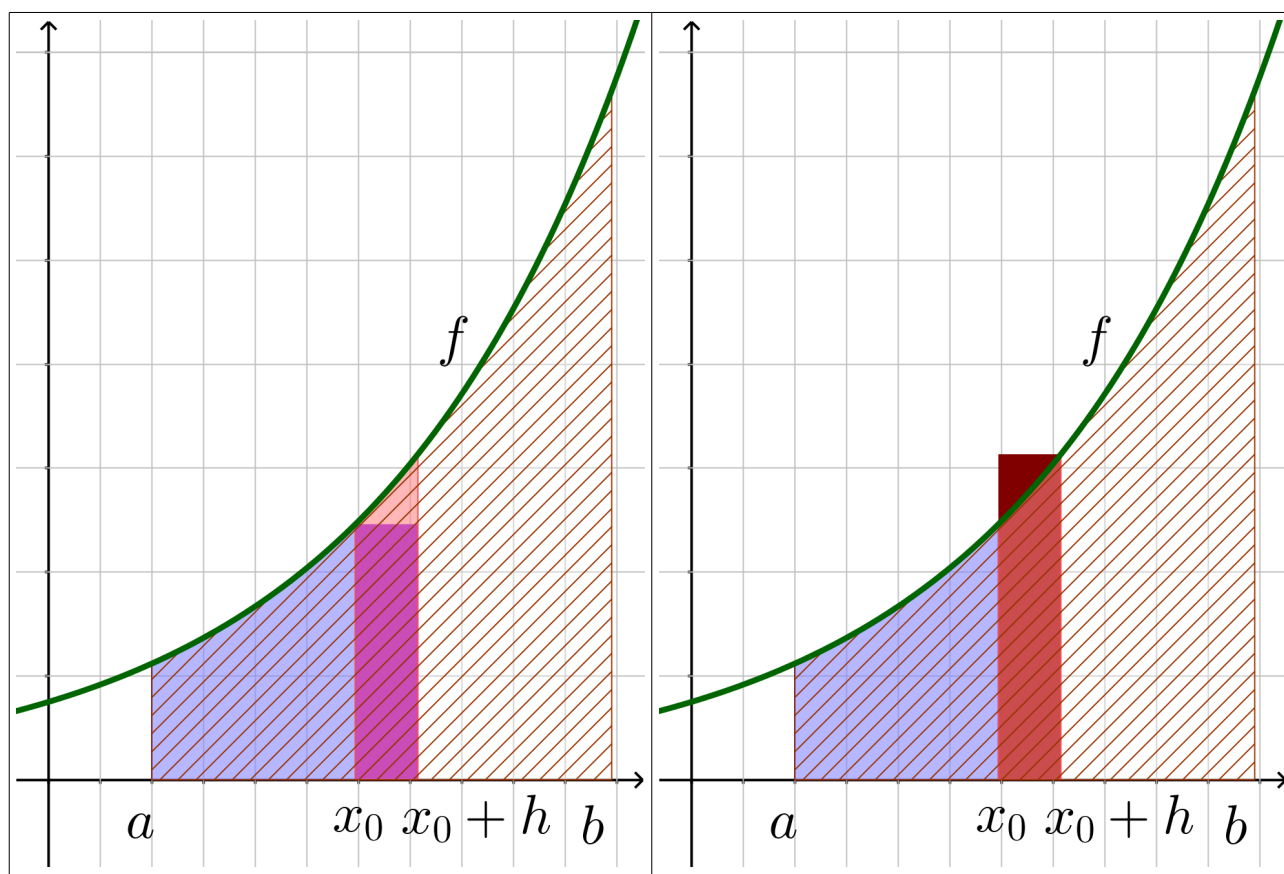
Beregning af $A'(x_0)$

Trin 1: Beregning af Δy

$\Delta y = \Delta A$ er defineret som forskellen mellem to y-værdier for arealfunktionen:

$\Delta y = A(x_0 + h) - A(x_0)$, hvor h som sædvanlig er den lille ændring i x -værdien

På den forrige side kan du se Δy som størrelsen af det røde område; $A(x_0)$ er størrelsen af det blå område og $A(x_0 + h)$ er størrelsen af både det røde og det blå område.



Vi har endnu ikke en teknik til at beregne Δy , men vi kan finde både en overgrænse og en undergrænse for arealets størrelse.

Det forudsættes stiltiende, at $h > 0$; er $h < 0$ ændres argumentationen, men det endelige resultat bliver det samme.

På figuren til venstre (højre) ses klart, at det magentafarvede (brune) rektangels areal er mindre (større) end Δy , idet bredden er h og højden er $f(x_0)$ ($f(x_0 + h)$). Da f er voksende, er højden den mindste (største) funktionsværdi i $[x_0, x_0 + h]$.

Derfor gælder denne dobbeltulighed:

$\text{Areal}(\text{magenta område}) \leq \Delta y \leq \text{Areal}(\text{brune område}) \Leftrightarrow$

$$f(x_0) \cdot h \leq \Delta y \leq f(x_0 + h) \cdot h$$

Trin II: Beregning af sekanthældning

Sekanthældningen for arealfunktionen er

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{h}.$$

Derfor gælder:

$$\frac{f(x_0) \cdot h}{h} \leq \frac{\Delta y}{h} \leq \frac{f(x_0 + h) \cdot h}{h} \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) \leq \frac{\Delta y}{h} \leq f(x_0 + h)$$

Trin III: Beregning af tangenthældning

Tangenthældningen er grænseværdien for sekanthældningen (når h går mod 0) – hvis den findes.

Men i ovenstående dobbeltulighed er $f(x_0)$ konstant og da f er kontinuert, nærmer $f(x_0 + h)$ sig $f(x_0)$ for h gående mod 0. Heraf følger, at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = f(x_0) \text{ for } h \text{ gående mod } 0.$$

Derfor er $A'(x_0) = f(x_0)$ og da det gælder generelt for alle værdier af x_0 , fås at arealfunktionens afledte funktion er

$$A'(x) = f(x)$$

Beregning af $A(x)$

Heraf følger, at arealfunktionen er én af stamfunktionerne til f . Lad $F(x)$ være en vilkårlig stamfunktion til f . Så gælder, at

$$A(x) = F(x) + k$$

Da $A(a) = 0$ fås

$$A(a) = 0 \Leftrightarrow F(a) + k = 0 \Leftrightarrow k = -F(a)$$

Hermed er arealfunktionens forskrift:

$$A(x) = F(x) - F(a)$$

Beregning af arealet fra a til b

For at finde netop det søgte areal mellem linjerne $x = a$ og $x = b$ indsættes b i

arealfunktionen: $A(b) = F(b) - F(a)$, hvor det bemærkes, at F er en vilkårlig stamfunktion. Havde vi valgt en anden stamfunktion, ville begge led ændre sig lige meget og

forskellen forblive den samme.

Som skrivemåde for dette udtryk benyttes integrationstegnet vist herunder med grænserne tilføjet. Udtrykket betegnes "det bestemte integral af $f(x)$ fra a til b " og beregner her et areal.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Definition af DBI II

Givet en kontinuert funktion $f(x)$, defineres det bestemte integral som

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

hvor F er en vilkårlig stamfunktion.

Bemærk, at tallet er uafhængigt af den valgte stamfunktion. Samt at selvom DBI stadig kan beregne arealer, kan det nu benyttes mere generelt.

Elementære sætninger

1. Indskudssætningen $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ (for en kontinuert funktion.)
2. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
3. Arealet af området mellem to grafer, hvor $f(x) \geq g(x)$: $A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$
4. Heraf følger, at ligger grafen under x-aksen, er arealet $A = -\int_a^b f(x) dx$

Eks.opgaven 14a, stx B, maj 1991

En funktion $f(x)$ er bestemt ved

$$f(x) = x(k - x)$$

hvor k er et positivt tal. Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets førsteakse en punktmængde M , der har et areal.

- a) Skitser for $k = 10$ området M , og bestem arealet af M .
- b) Bestem tallet k , når det oplyses, at arealet af M er 100.

Differential- og integralregning (1)

Besvarelse

Grafen tegnes

Grafen for f tegnes med GeoGebra.

Kommandoerne " $k = 10$ " og "

$f(x) = x(k-x)$ " benyttes.

Arealberegning

For at finde det søgte areal findes

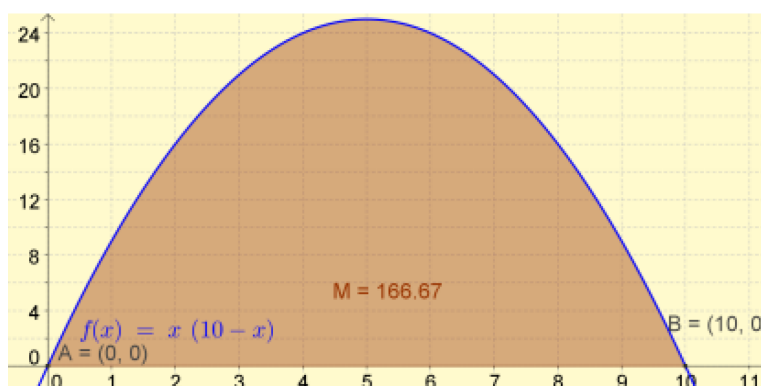
skæringspunkter mellem

førsteaksen og grafen med

skæringsværktøjet. Punkterne er A

og B . Da grafen på nær i endepunkterne ligger over førsteaksen fås arealet som det bestemte integral beregnet med GeoGebra:

$$\text{Areal}(M) = \int_{x(A)}^{x(B)} f(x) dx = 167 \quad . M \text{ er det brune område på figuren.}$$



Bestem k

Ved løsning af ligningen $x(k-x)=0$ fås nemt løsningerne 0 og k . Arealet kan så bestemmes som:

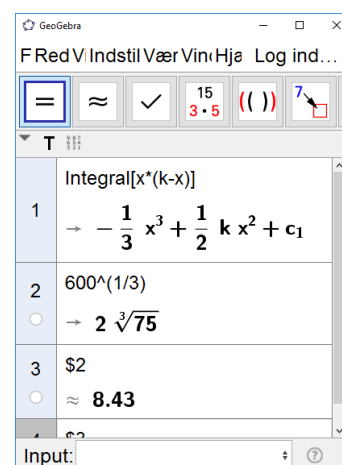
$$\text{Areal}(M_2) = \int_0^k x(k-x) dx = F(k) - F(0)$$

Funktionen F findes nemt som en stamfunktion til $x(k-x)$: $F(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{kx^2}{2}$ (med eller uden GeoGebra):

Dernæst findes k ved at løse ligningen herunder (hvortil GeoGebra evt. kunne være anvendt):

$$\begin{aligned} \text{Areal}(M_2) &= 100 \Leftrightarrow \\ F(k) - F(0) &= 100 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{-k^3}{3} + \frac{k \cdot k^2}{2} \right) - (0+0) &= 100 \Leftrightarrow \\ \frac{k^3}{6} &= 100 \Leftrightarrow \\ k^3 &= 600 \Leftrightarrow \\ k &= \sqrt[3]{600} \end{aligned}$$

$$k = 8,43$$



Oversigt

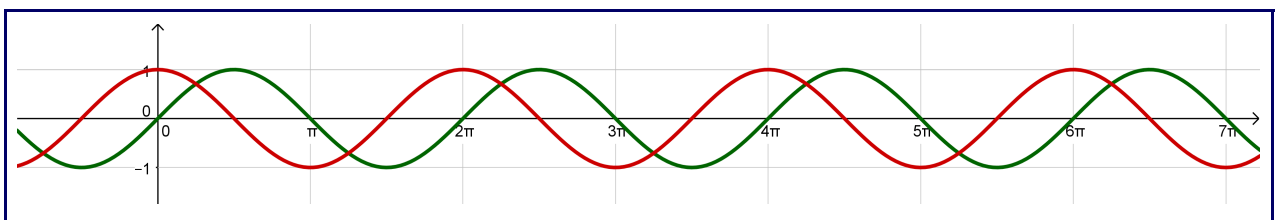
Du skal nu kunne:

- integrere de almindelige funktioner, der er omtalt her
- benytte integrationsregler, herunder substitution med Leibniz teknik
- finde en bestemt stamfunktion med givne egenskaber (fx at P ligger på grafen)
- finde arealer i koordinatsystemet
- volumen af omdrejningslegemer
- længder af grafer

Desuden skal du være fortrolig med begreberne

- en stamfunktion
- det ubestemte integral
- det bestemte integral

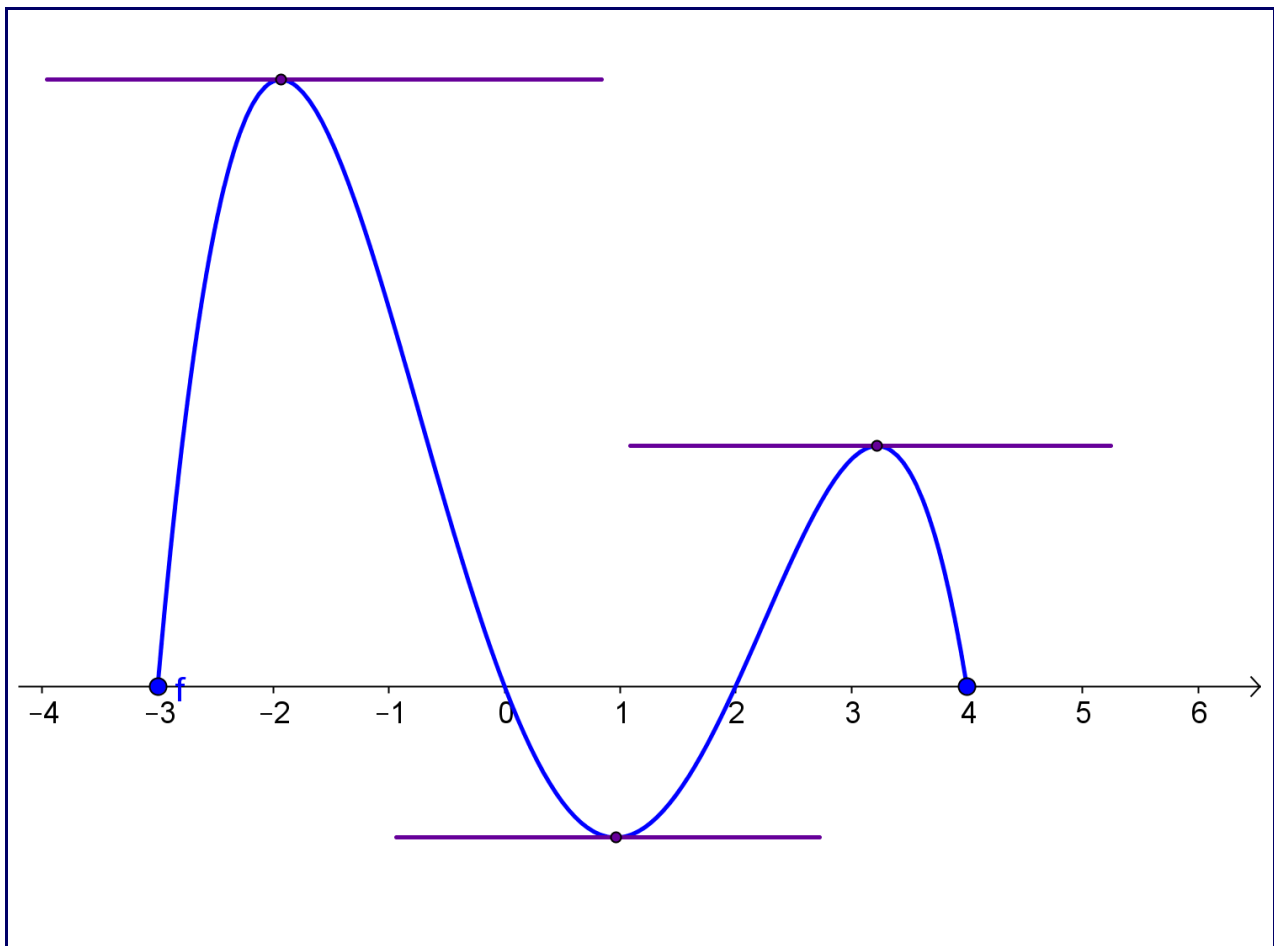
Appendiks



Rolles sætning ¹²

Hvis f er en kontinuert funktion i det lukkede interval $[a, b]$ og f er differentiabel i det åbne interval $I =]a, b[$ samt $f(a) = f(b) = 0$ eksisterer der et tal c :

$$c \in I : f'(c) = 0$$



Bemærkning

Rolles sætning siger, at opfylder f de nævnte betingelser, findes der mindst én vandret tangent. Tegningen herover er et eksempel på, at der ikke bare er én værdi for c , hvor $f'(c) = 0$, men hele 3.

Bevis

Beviset deles op i 3 forskellige beviser afhængig af funktionens art: konstant eller ikke konstant og idet sidste tilfælde med en opdeling afhængig af, om størsteværdien $S > 0$.

¹² Kravet om at funktionsværdierne i a og b skal være 0 er ikke nødvendigt; sætningen kan også bevises, hvis de blot er ens.

Antag f er konstant; dvs. $f'(x)=0$. Heraf følger, at for alle værdier i I er $f'(x)=0$.

Antag dernæst, at f ikke er konstant: Så findes der enten en størsteværdi $S > 0$ eller en mindsteværdi $m < 0$.¹³

Antag, at der findes en størsteværdi, der antages i c . Dvs. at $f(c)=S$. Da f er differentiabel i c , findes der en tangent i (c,S) med hældningen $f'(c)$.

Da alle sekant, hvor det andet punkt ligger til venstre vil have en hældningskoefficient større end eller lig med nul, vil

$$f'(c) \geq 0$$

Tilsvarende vil alle sekant, hvor det andet punkt ligger til højre have en hældningskoefficient mindre end eller lig med nul:

$$f'(c) \leq 0$$

Derfor er $f'(c)=0$

Hvis der i stedet findes en mindsteværdi, føres beviset tilsvarende.

Øvelse 20

- Undersøg de to eksempler herunder.
- Gælder Rolles sætning for eksemplerne?

Eksempel I

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \text{ DM}=[-1,1]$$

Eksempel II

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \text{ DM}=(0,N], \text{ hvor } N \text{ er et vilkårligt stort positivt tal.}$$

¹³ Den sidste påstand bør også bevises, hvilket dog fører for vidt her. Interesserede kan undersøge sætninger om kontinuerte funktioner: I et lukket interval som her vil de både være begrænsede og antage størsteværdien og mindsteværdien.

Middelværdisætningen

Hvis f er en kontinuert funktion i det lukkede interval $[a, b]$ og f er differentiabel i det åbne interval $I =]a, b[$ eksisterer der et tal c :

$$c \in I : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bemærkning

Sætningen siger, at der findes mindst en tangent med samme hældning som sekanten mellem endepunkterne.

Lad $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Bevis

Definer funktionen g i intervallet $[a, b]$ som:

$$g(x) = f(x) - k \cdot (x - a) - f(a)$$

Da både f og $k \cdot (x - a) - f(a)$ er differentiable funktioner i det åbne interval og definerede i det lukkede interval fra a til b , gælder det samme for g .

$$g(a) = f(a) - k \cdot (a - a) - f(a) = 0 \quad \text{og}$$

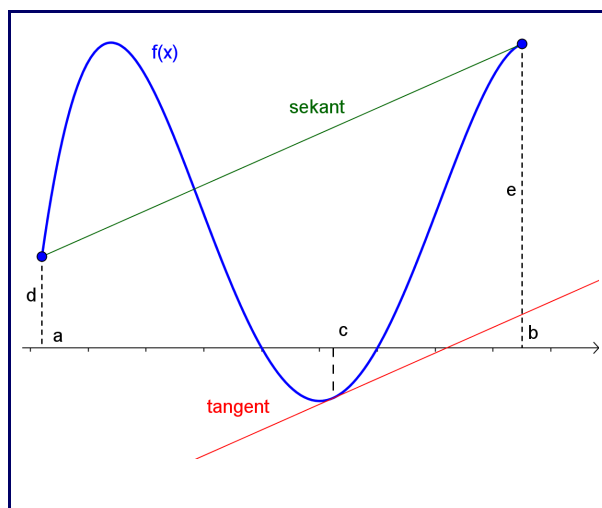
$$g(b) = f(b) - k \cdot (b - a) - f(a) = f(b) - f(a) - k \cdot (b - a) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$$

Derfor gælder Rolles sætning og vi får at der eksisterer et c , så:

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - k = 0 \Leftrightarrow f'(c) = k \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ som indses ved}$$

- at differentiere funktionen g
- løse ligningen mht. $f'(x)$ samt
- indsætte definitionen af k .

Hermed er middelværdisætningen bevist.



Definition af $\ln(x)$

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \text{ DM} =]0; \infty[$$

Heraf følger umiddelbart

Sætning $\ln'(x) = 1/x$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Lad F være en vilkårlig stamfunktion til $1/t$. Så gælder, at

$$\ln'(x) = \left(\int_1^x \frac{1}{t} dt \right)' = (F(x) - F(1))' = (F(x))' - (F(1))' = F'(x) - 0 = \frac{1}{x}$$

Heraf følger:

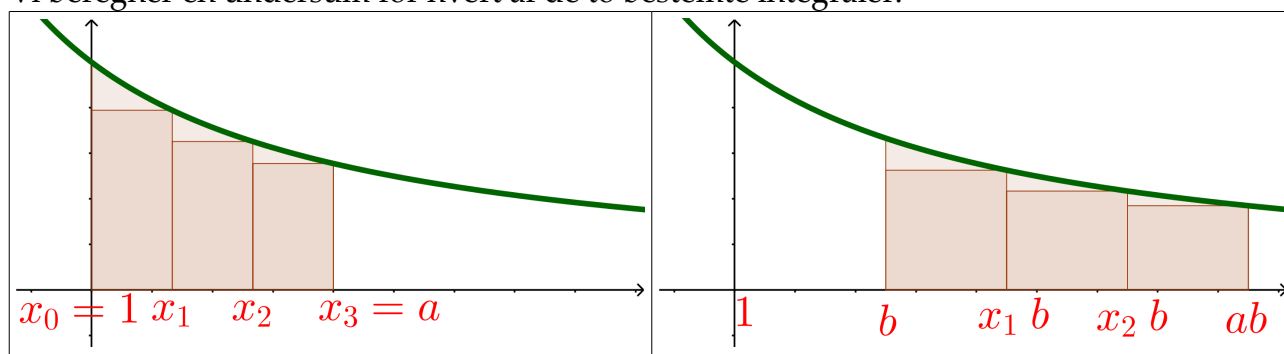
1. Da $1/x > 0$ ses, at $\ln(x)$ er en voksende funktion i hele definitionsområdet
2. Da $\ln$ er differentiabel, er $\ln$ også kontinuert

Hjælpesætning

$$\int_1^a \frac{1}{t} dt = \int_b^{ab} \frac{1}{t} dt$$

Bevis

Vi beregner en undersum for hvert af de to bestemte integraler:



For begge undersummer benyttes samme værdi af n (antallet af rektangler, og det ses, at bredderne er hhv.

$$b_v = \frac{a-1}{n} \quad \text{og} \quad b_h = \frac{ab-b}{n} = b \cdot \frac{a-1}{n} \quad \text{ved en lighedeling af det samlede interval, og at det}$$

er i overensstemmelse med delepunkterne til højre, idet

$$x_i b - x_{i-1} b = b(x_i - x_{i-1}) = b \cdot \frac{a-1}{n}.$$

For højderne af tilsvarende rektangler ses, at til venstre er højden $f(x_i) = \frac{1}{x_i}$, til højre er

Differential- og integralregning (1)

$$\text{højden } f(x_i \cdot b) = \frac{1}{x_i \cdot b}$$

Da rektanglet til højre er b gange bredere, men også har en højde, der er b gange mindre end det tilsvarende til venstre, har rektanglerne samme areal, og undersummerne med samme værdi af n er lige store.

Det medfører at grænseværdien for n gående mod uendelig er den samme for begge undersummer, men det betyder at de to integraler er lige store..

Hovedsætning

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Bevis

$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t} dt =$$

Ifølge definitionen af $\ln(x)$

$$\int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt =$$

Ifølge indskudssætningen

$$\int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_1^b \frac{1}{t} dt =$$

Ifølge hjælpesætningen

$$\ln(a) + \ln(b)$$

Ifølge definitionen af $\ln(x)$

Andre logaritmesætninger

$$1. \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad a, b > 0$$

$$2. \quad \ln(a^b) = b \cdot \ln(a) \quad a > 0$$

Øvelse 21

- Bevis ovenstående sætning 1
- Bevis sætning 2, når b er et naturligt tal. (Men sætningen er rigtig for alle reelle tal.)

Definition af e

Tallet e er løsningen til ligningen $\ln(x) = 1$.

Bemærk, at e er veldefineret, da $\ln$ er en voksende funktion med $\text{VM}(\ln) = \mathbb{R}$. Da e er transcendent¹⁴ ligesom π , er det ikke muligt (helt nøjagtigt) at skrive det som et decimaltal, men afrundet gælder: $e = 2,71828$

¹⁴ https://en.wikipedia.org/wiki/Transcendental_number

Sætning

$\ln$ har en omvendt funktion $\ln^{-1}$, der er kontinuert og voksende.

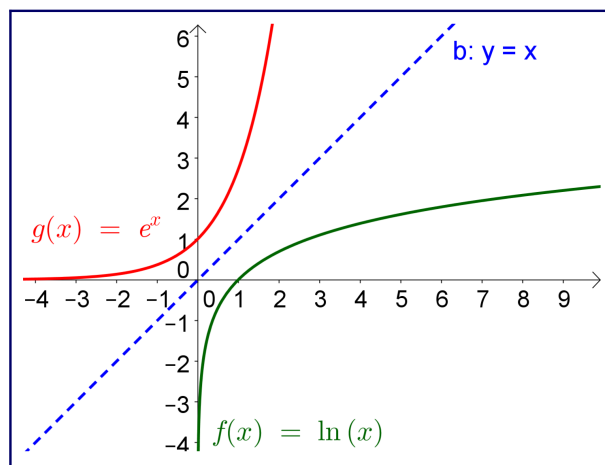
$$\ln^{-1}(x) = e^x$$

Bevis

Første del af sætningen følger umiddelbart af, at $\ln$ er kontinuert og voksende.

På tegningen ses grafen for $\ln$ (grøn) og det røde spejlbillede i linjen $y = x$, som er grafen for $\ln^{-1}$.

$$\begin{aligned}\ln^{-1}(x) &= e^x \Leftrightarrow \\ \ln(\ln^{-1}(x)) &= \ln(e^x) \Leftrightarrow \\ x &= x \ln(e) \Leftrightarrow \\ x &= x \cdot 1\end{aligned}$$



Ved omskrivningerne benyttes 1) at $\ln$ er en voksende funktion, 2) logaritmereglen for potenser og definitionen af e . Da den sidste ligning er indlysende rigtig, gælder det også den første.

Vi kan nu definere e^x enten som den omvendte funktion til $\ln$ eller som en eksponentiel funktion med begyndelsesværdi $b=1$ og væksthastighed $a=e$ (som defineret v.h.j.a. funktionen $\ln$).

Definition

$$e^x = \ln^{-1}(x)$$

Den afledte funktion

Den sammensatte funktion $h(x) = \ln(e^x) = x$ har den afledte funktion $h'(x) = 1$

Findes $(e^x)'$ ved implicit differentiation fås:

$$\begin{aligned}(\ln(e^x))' &= (x)' \Leftrightarrow \\ \frac{1}{e^x} \cdot (e^x)' &= 1 \Leftrightarrow \\ (e^x)' &= e^x\end{aligned}$$

Hermed ses, at den afledte funktion af eksponentialfunktionen er:

$$(e^x)' = e^x$$

Endvidere ses, at

Differential- og integralregning (1)

1. grafen for e^x går gennem (0,1) og
2. at tangenten i dette punkt har hældningskoefficienten 1

Stikordsregister

afledte funktion f' , Den.....	16
Afledte funktioner.....	16
alkvantor.....	11
Andre funktioner.....	20
Appendiks.....	60
bestemte integral, Det.....	51
brøkregel, Generel.....	29
Brøkregler.....	29
Cosinusfunktionen.....	20
differentialkvotienten.....	15
Differentiationsprøven.....	47
e^x , Sætning.....	66
eksistenskvantor.....	11
Ekspontentialfunktionen.....	20
Funktionen $1/x$	19
Grænseværdier.....	11
Hældningskoefficienten.....	15
Induktionsaksiomet.....	21
Integralregning.....	47
konstant funktion.....	16
kontinuert.....	12
Kontinuitet (Definition).....	12
Konvergens.....	10
Kvadratfunktionen.....	17
Kvadratrodsfunktionen.....	19
Kædereglene.....	26
Kædereglene (Sætning).....	27
Leibniz.....	5, 48
lim.....	11
limes.....	11
lineær funktion.....	17
ln, Hjælpesætning.....	64
ln, Hovedsætning.....	65
Logaritmefunktionen ln.....	20
Middelværdisætningen.....	63
Newton.....	5
Omegn.....	11
Partiel integration.....	49
Potensfunktioner.....	20
Produkt af funktioner.....	25
Produkt af konstant og funktion.....	24
Reciprok funktion.....	29

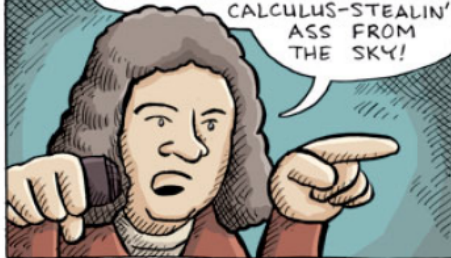
Differential- og integralregning (1)

Rolles sætning.....	61
Sammensat funktion.....	26
$\sin'(x)$	22
Sinusfunktionen.....	20
skrivemåder for den afledte funktion.....	21
stamfunktion, Definition af.....	47
stamfunktioner, Liste over.....	50
stamfunktioner, Sætning om	47
Substitution.....	49
Substitution med Leibniz teknik.....	49
Sum af funktioner.....	24
tangenthældningen.....	15
tilhører mængden.....	11
ubestemte integral (Definition).....	48
ubestemte integral, Det	47
udprikkede omegn.....	11
$\ln$, Definition af.....	64
$\ln'$, Sætning.....	64

LEGENDARY
RAP BATTLES
IN SCIENCE
PRESENTS...

NEWTON
VS.
LEIBNIZ

THERE'LL NEVER BE ANOTHER #0%*ING
GENIUS LIKE ME. I INVENTED OPTICS,
MECHANICS, AND THE THEORY OF
GRAVITY. YOU PEEKED AT MY
MANUSCRIPTS, DON'T TRY TO LIE.
I'LL DROP APPLES ON YOUR
CALCULUS-STEALIN'
ASS FROM
THE SKY!



IF YOU DIDN'T PUBLISH FIRST, THEN
YOU CAN'T BE PISSSED. WITH MY
SUPERIOR NOTATION, FLUXIONS
WON'T BE MISSED. I'M GLAD
YOU'LL BE A VIRGIN WHEN YOU
DIE AT LAST. SO YOUR INFERIOR
GENES WON'T
EVER BE
PASSED!



YUP, NOTHING
SAYS GANGSTA
LIKE A
BIG, STYLISH
WIG!